

## Монография "Сплайн-всплесковая обработка потоков структурированной информации"

Коллектив авторов: доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики СПбГУ Бурова Ирина Герасимовна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры параллельных алгоритмов Демьянович Юрий Казимирович, доцент кафедры параллельных алгоритмов, кандидат физико-математических наук Евдокимова Татьяна Олеговна, доцент кафедры параллельных алгоритмов, кандидат физико-математических наук Иванцова Ольга Николаевна.

Книга посвящена сплайн-всплесковой (вэйвлетной) обработке потоков структурированной числовой информации. Предложены адаптивные схемы одновременной обработки нескольких потоков, структура которых характеризуется изменчивостью как во времени, так и в пространстве. Вводится понятие обобщенной гладкости, благодаря чему удастся рассмотреть сингулярные сплайн-всплески, а также установить вложенность сплайновых пространств на вложенных сетках. Анализируется всплесковая обработка целочисленных потоков с использованием целочисленной арифметики. Исследования распространяются на весьма общие ситуации: на потоки конечных и бесконечных векторов, на потоки матриц, а также на потоки элементов нормированных пространств. Представлены адаптивные сплайн-всплесковые разложения потоков, ассоциированных с клеточным подразделением произвольных дифференцируемых многообразий (в том числе гладких поверхностей).

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, а также для лиц, занимающихся проблемами обработки числовых информационных потоков.

Первая глава содержит сплайн-всплесковые (вэйвлетные) разложения пространств сплайнов различных порядков на неравномерной сетке. Здесь исследованы асимптотические свойства координатных сплайнов, для них получены двусторонние оценки и найдены достаточные условия их положительности. Сплайновое разложение — это представление объемлющего пространства в виде прямой суммы вложенного пространства и того или иного дополнения к нему. Отсюда видна фундаментальная роль вложенности пространств при построении вэйвлетного разложения. До сих пор рассмотренные сплайновые пространства максимальной гладкости оказывались вложенными на вложенных сетках. В дальнейшем выясняется, что требование обобщенной максимальной гладкости также приводит к вложенности пространств, ассоциированных с вложенными сетками.

Вторая глава посвящена сплайнам лагранжева типа, обобщенной гладкости и упомянутому свойству вложенности сплайновых пространств.

В третьей главе рассматривается всплесковое разложение потока сложной структуры, включающего несколько потоков одновременно: поток значений функции и потоки значений нескольких ее производных в узлах. Локальное укрупнение/измельчение сплайновой сетки рассмотрено в первых трех параграфах; они посвящены сплайн-всплесковым разложениям пространств (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов эрмитова типа первой, второй и третьей высоты соответственно. Базис этих сплайнов получается из аппроксимационных соотношений при минимальной кратности покрытия носителями базисных функций. Получаемые базисные вэйвлеты дифференцируемы и имеют компактный носитель, причем предлагаемые алгоритмы ведут к увеличению размерности вэйвлетного пространства соответственно на две, три или четыре единицы. Результатом являются достаточно простые формулы декомпозиции/реконструкции.

Всплесковые (вэйвлетные) разложения широко используются при обработке числовых информационных потоков; объемы таких потоков постоянно возрастают, и это является стимулом к дальнейшему развитию теории всплесков. Используемый в данной главе подход к построению

всплесков основывается на применении аппроксимационных соотношений, поэтому автоматически обеспечивается эффективная аппроксимация (чаще всего она асимптотически оптимальна по  $N$ -поперечнику стандартных компактов). В противоположность классическим вэйвлетам упомянутый подход позволяет без дополнительных сложных исследований использовать неравномерную сетку (как конечную, так и бесконечную), что весьма важно для экономии компьютерных ресурсов в случае появления быстрых изменений рассматриваемых исходных потоков. В классическом случае большую трудность представляет построение всплескового (вэйвлетного) базиса в том или ином функциональном пространстве. Используемый здесь подход не требует предварительного построения всплескового базиса (при желании этот базис может быть получен после проведения основных исследований).

## SPLINE-WAVELET PROCESSING OF STRUCTURED INFORMATION FLOWS

I.G.Burova (Affiliation: Saint-Petersburg State University), Yu.K.Dem'yanovich (Affiliation: Saint-Petersburg State University), T.O.Evdokimova (Affiliation: Saint-Petersburg State University), O.N.Ivantsova (Affiliation: Saint-Petersburg State University)

The book is devoted to the processing of spline-wavelet flows of structured numerical information. Adaptive schemes for the simultaneous processing of several flows are proposed. The structure of flows is characterized by variability in both time and space. The concept of generalized smoothness, due to it being possible to consider singular spline wavelets, and setting embedded spline spaces on embedded grids. The wavelet designing of integer flows is very important. It uses integer arithmetic. Research extends to very general situations: flows of finite and infinite vectors, flows of matrices, as well as flows of elements of normalized spaces. Introduced adaptive spline-wavelet decompositions of flows are associated with the cellular subdivision of arbitrary differentiable manifolds (including smooth surfaces). The publication is intended for researchers, graduate students and students, as well as for persons dealing with the problems of processing numerical information flows.

The first chapter contains spline-wavelet expansions spaces of splines of different orders on an irregular grid. Here the asymptotic properties of coordinate splines are investigated. Two-sided estimates are obtained and sufficient conditions for their positivity are found.

So, spline decomposition is a representation of the envelop space as a direct sum of the enclosed space and one or another complement to it. This shows the fundamental role of embedded spaces when a wavelet decomposition is constructed. So far, the considered spline spaces of maximum smoothness have turned out to be embedded on embedded grids. In what follows, it turns out that the requirement of generalized maximum smoothness also leads to the embedding of spaces associated with embedded grids. Second chapter is devoted to splines of the Lagrange type, generalized smoothness, and the mentioned embedded property of spline spaces.

In third chapter, we consider the wavelet decomposition of a complex flow structure, which includes several flows simultaneously: the flow of values of a function and flows of values of several of its derivatives at the knots. Local coarsening / refining of the spline grid is discussed in the first three paragraphs; they are devoted to spline wavelet decompositions of spaces of (generally speaking, non-polynomial) splines of the Hermitian type of the first, second, and third levels, respectively. The basis of these splines is obtained from the approximation relations with the minimum multiplicity of coverage by the supports of the basis functions. The resulting basic wavelets are differentiable and have a compact support, and the proposed algorithms lead to an increase in the dimension of the wavelet space by two, three, or four units, respectively. The result is fairly simple decomposition / reconstruction formulas.

Wavelet expansions are widely used in processing numerical information streams; the volumes of such flows are constantly increasing, and this is a stimulus for the further development of the wavelet theory. The approach to constructing waveforms used in this chapter is based on the use of approximation ratios. Therefore, an effective approximation is automatically provided (most often it is asymptotically optimal

with respect to the N-width of standard compact sets). In contrast to classical wavelets, the above approach allows using a non-uniform grid (both finite and infinite) without additional complex studies, which is very important for saving computer resources in the event of rapid changes in the considered initial flows. In the classical case, it is very difficult to construct a wavelet basis in one or another functional space. The approach used here does not require preliminary construction of the wavelet basis (if desired, this basis can be obtained after conducting basic research).

### Монография "Сплайн-всплески и их реализация"

Коллектив авторов: доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики СПбГУ Бузова Ирина Герасимовна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры параллельных алгоритмов Демьянович Юрий Казимирович, доцент кафедры параллельных алгоритмов, кандидат физико-математических наук Евдокимова Татьяна Олеговна.

В предлагаемом научном издании в различных аспектах изучаются сплайн-вейвлетные разложения. Даны способы построения цепочек вложенных пространств, в том числе при локальном укрупнении неравномерной сетки, даны вейвлетные (всплесковые) разложения и рассмотрены структуры операторов гнездового сплайн-вейвлетного разложения получающихся при удалении группы узлов (гнезд); выводятся соответствующие формулы декомпозиции и реконструкции. Рассматривается интерференционная картина сплайн-вейвлетного разложения в случае гребенчатой структуры элементарных гнезд на неравномерной сетке. Даны алгоритмы декомпозиции и реконструкции, рассмотрен эффект образования стоячих волн, получены оценки компонент вейвлетного потока. Обсуждаются вопросы построения алгоритмов распараллеливания для вейвлетных разложений конечно-элементных пространств. Рассмотрены аппроксимации, использующие биортогональные системы функционалов и другие вопросы, связанные со сплайн-вейвлетной обработкой информации.

### SPLINE-WAVELETS AND THEIR IMPLEMENTATION

I.G.Burova (Affiliation: Saint-Petersburg State University), Yu.K.Dem'yanovich (Affiliation: Saint-Petersburg State University), T.O.Evdokimova (Affiliation: Saint-Petersburg State University)

In the proposed scientific publication, spline-wavelet expansions are studied in various aspects. Methods for constructing chains of nested spaces for local enlargement of a non-uniform mesh, wavelet (splash) expansions are given. Structures of operators of nested spline-wavelet decomposition obtained by removing a group of nodes (nests) are considered. The decomposition and reconstruction formulas are derived. The interference pattern of the spline-wavelet decomposition in the case of a comb structure of elementary nests on an uneven grid is considered. Algorithms for decomposition and reconstruction are given, the effect of the formation of standing waves is considered. Estimates of the components of the wavelet flow are obtained. Questions of constructing parallelization algorithms for wavelet decompositions of finite element spaces are discussed. Approximations using biorthogonal systems of functionals and other issues related to spline-wavelet information processing are considered.

Burova, I.G., Doronina, A.G. On approximations by polynomial and nonpolynomial integro-differential splines (2016) Applied Mathematical Sciences, 10 (13-16), pp. 735-745. Цитировано 8 раз. DOI: 10.12988/ams.2016.613

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The present article is one of a number of articles in which the authors study the properties of integro-differential splines. The paper deals with the construction of integro-differential polynomial and nonpolynomial splines of the fifth order. The order of approximation with integro-differential polynomial and nonpolynomial splines of the fifth order are given. We use the tensor product of polynomial and non-polynomial splines constructed in this paper for the approximation of functions of two variables. The results of these numerical experiments are given.

Настоящая статья - одна из ряда статей, в которых авторы исследуют свойства интегро-дифференциальных сплайнов. Статья посвящена построению интегро-дифференциальных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов пятого порядка. Приведен порядок аппроксимации интегро-дифференциальными полиномиальными и неполиномиальными сплайнами пятого порядка. Мы используем тензорное произведение полиномиальных и неполиномиальных сплайнов, построенное в этой статье, для приближения функций двух переменных. Приведены результаты этих численных экспериментов.

Burova, I.G., Poluyanov, S.V. On approximations by polynomial and trigonometrical integro-differential splines (2016) International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 10, pp. 190-199. Цитировано 9 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Here we construct continuously differentiable approximation using middle and left basis integro-differential splines of fifth order. The goal of this work is the presentation of some new formulas which are useful for the approximation of the functions with one and two variables. Here we construct the basic one-dimensional polynomial and trigonometrical integro-differential splines of the fifth order approximation. For each interval we construct the approximation separately. In order to construct the approximation in each interval we need the values of the function, its first derivative in the points of interpolation, and the value of the integral of the function over the interval. If we don't know the values of the first derivative of the function in the points of interpolation and/or the value of the integral of the function over the interval then we use the expressions which were obtained for this instance and the error of the approximation will be of the fifth order. The one-dimensional case can be extended to multiple dimensions through the use of the tensor product spline constructs. The examples of the approximations functions of two variables are included. The spline approximation schemes discussed in this paper allow us to control the effect of knot placement on the accuracy of spline approximation. Numerical examples are presented.

Здесь мы строим непрерывно дифференцируемую аппроксимацию с помощью средне- и левобазисных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка. Целью данной работы является представление некоторых новых формул, которые полезны для приближения функций с одной и двумя переменными. Здесь мы строим основные одномерные полиномиальные и тригонометрические интегро-дифференциальные сплайны пятого приближения. Для каждого интервала построим аппроксимацию отдельно. Для построения аппроксимации в каждом интервале нам потребуются значения функции, ее первая производная в точках интерполяции и значение интеграла функции по интервалу. Если нам неизвестны значения первой производной функции в точках интерполяции и / или значение интеграла функции по интервалу, то мы используем выражения, полученные для этого случая, и погрешность приближение будет пятого порядка. Одномерный случай может быть расширен до нескольких измерений за счет использования сплайновых конструкций тензорного произведения. Приведены примеры аппроксимационных функций двух переменных. Схемы аппроксимации сплайном, обсуждаемые в

этой статье, позволяют нам контролировать влияние размещения узла на точность аппроксимации сплайном. Приведены числовые примеры.

Dem'yanovich, Y.K., Gerasimov, I.V. Local Coarsening of Simplicial Subdivisions (2016) Journal of Mathematical Sciences (United States), 216 (2), pp. 219-235. Цитировано 2 раз. DOI: 10.1007/s10958-016-2896-9

ОРГАНИЗАЦИИ: Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We construct two types of simplicial subdivisions admitting an embedded local coarsening. In both cases, we propose coarsening algorithms and prove that the obtained simplicial subdivision is regular. For subdivisions of the second type we show that the local coarsening algorithm is recursive.

Мы строим два типа симплициальных подразделений, допускающих вложенное локальное укрупнение. В обоих случаях мы предлагаем алгоритмы укрупнения и доказываем регулярность полученного симплициального подразделения. Для подразделений второго типа мы показываем, что алгоритм локального укрупнения рекурсивен.

Burova, I.G. Application of non-polynomial splines to solving differential equations (2020) WSEAS Transactions on Mathematics, 19, pp. 531-548. DOI: 10.37394/23206.2020.19.58

ОРГАНИЗАЦИИ: Department of Computational Mathematics, St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The application of the local polynomial and non-polynomial to the construction of methods for numerically solving the heat conduction problem is discussed. The non-polynomial splines are used here to approximate the partial derivatives. Formulas for numerical differentiation based on the application of the non-polynomial splines of the fourth order of approximation are constructed. Particular attention is paid to polynomial, trigonometric, exponential, polynomial-trigonometric and polynomial-exponential splines. This approach allows us to construct explicit and implicit difference schemes. The main focus of the paper is on implicit difference scheme. New approximations with splines of the Lagrange and Hermite type with new properties are obtained. These approximations take into account the first and second derivatives of the function being approximated. Numerical examples are given.

Обсуждается применение локальных полиномиальных и неполиномиальных функций к построению методов численного решения задачи теплопроводности. Неполиномиальные сплайны используются здесь для аппроксимации частных производных. Построены формулы численного дифференцирования на основе применения неполиномиальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации. Особое внимание уделяется полиномиальным, тригонометрическим, экспоненциальным, полиномиально-тригонометрическим и полиномиально-экспоненциальным сплайнам. Такой подход позволяет строить явные и неявные разностные схемы. Основное внимание в статье уделяется неявной разностной схеме. Получены новые приближения со сплайнами типа Лагранжа и Эрмита с новыми свойствами. Эти приближения учитывают первую и вторую производные аппроксимируемой функции. Приведены числовые примеры.

Burova, I.G., Zhilin, D.E. Polynomial and non-polynomial splines with the fourth order of approximation (2020) Applied Mathematics and Information Sciences, 14 (4), pp. 533-545. DOI: 10.18576/JSAP/140402

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper addresses the construction of polynomial and non-polynomial splines of the fourth order of approximation. Smooth non-polynomial splines of the minimal defect are constructed using preliminarily constructed Hermite-type splines. The estimates of the approximations are given and the constants they include are calculated.

В данной статье рассматривается построение полиномиальных и неполиномиальных сплайнов четвертого порядка аппроксимации. Гладкие неполиномиальные сплайны минимального дефекта строятся с использованием предварительно построенных сплайнов типа Эрмита. Даны оценки приближений и вычислены входящие в них константы.

Burova, I.G. Construction of non-polynomial splines of the first level with fourth order of approximation (2020) AIP Conference Proceedings, 2293, статья № 420016. DOI: 10.1063/5.0031655

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Interpolation using Hermite polynomial cubic splines is well known and often used. Here we propose an approximation with the non-polynomial splines with the fourth order of approximation. The splines uses the values of the function and the first derivative of the function in the nodes. We call the approximation as first level approximation because it uses the first derivative of the function. This approximation has the properties of polynomial and trigonometric functions. Here we also have constructed a non-polynomial interpolating spline which has continuous the first and second derivative. This approximation uses the values of the function at the nodes and the values of the first derivative of the function at the ends of the interval  $[a, b]$ . Estimates of the approximations are given and the constants included in them are calculated. Numerical examples are given.

Интерполяция с использованием полиномиальных кубических сплайнов Эрмита хорошо известна и часто используется. Здесь мы предлагаем аппроксимацию неполиномиальными сплайнами с четвертым порядком аппроксимации. Сплайны используют значения функции и первую производную функции в узлах. Мы называем это приближение приближением первой высоты, потому что оно использует первую производную функции. Это приближение обладает свойствами полиномиальных и тригонометрических функций. Здесь мы также построили неполиномиальный интерполирующий сплайн, у которого непрерывны первая и вторая производная. Это приближение использует значения функции в узлах и значения первой производной функции на концах интервала  $[a, b]$ . Даны оценки приближений и вычислены входящие в них константы. Приведены числовые примеры.

Burova, I.G. On approximations of the sixth order with the smooth polynomial and non-polynomial splines(2020) Proceedings - 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Science and Engineering, MACISE 2020, статья № 9195628, pp. 297-300. DOI: 10.1109/MACISE49704.2020.00062

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, Dept. of Computational Mathematics, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper discusses twice continuously differentiable and three times continuously differentiable approximations with polynomial and non-polynomial splines. To construct the approximation, a polynomial and non-polynomial local basis of the second level and the sixth order approximation is constructed. We call the approximation a second level approximation because it uses the first and the second derivatives of the function. The non-polynomial approximation has the properties of polynomial and trigonometric functions. Here we have also constructed a non-polynomial interpolating spline which has the first, the second and the third continuous derivative. This approximation uses the values of the function at the nodes, the values of the first derivative of the function at the nodes and the values of the second derivative of the function at the ends of the interval  $[a, b]$ . The theorems of the approximations are given. Numerical examples are given.

В статье обсуждаются дважды непрерывно дифференцируемые и трижды непрерывно дифференцируемые приближения с полиномиальными и неполиномиальными сплайнами. Для построения приближения строится полиномиальный и неполиномиальный локальный базис второй высоты приближения шестого порядка. Мы называем это приближение приближением второй высоты, потому что оно использует первую и вторую производные функции.

Неполиномиальное приближение обладает свойствами полиномиальных и тригонометрических функций. Здесь мы также построили непполиномиальный интерполирующий сплайн, который имеет первую, вторую и третью непрерывную производную. Это приближение использует значения функции в узлах, значения первой производной функции в узлах и значения второй производной функции на концах интервала  $[a, b]$ . Приведены теоремы об аппроксимации. Приведены числовые примеры.

Dem'yanovich, Y.K., Burova, I.G. Spaces of the haar type on arbitrary irregular grids (2020) WSEAS Transactions on Systems and Control, 15, pp. 592-600. DOI: 10.37394/23203.2020.15.59  
ОРГАНИЗАЦИИ: Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The paper deals with Haar-type spaces on arbitrary irregular grids. The choice of non-uniform grids determines the characteristics of the Haar-type space that can be used to construct the wavelet decomposition. Thus, it becomes a possible adaptive choice of the design space depending on the incoming flow. In contrast to the classical approach, this paper considers the possibility of the adaptive compression of the initial flow. The complexity of the algorithm is directly proportional to the length of the initial number flow. Numerical examples are presented.

Работа посвящена пространствам типа Хаара на произвольных нерегулярных сетках. Выбор неоднородных сеток определяет характеристики пространства типа Хаара, которые можно использовать для построения вейвлет-разложения. Таким образом, становится возможным адаптивный выбор пространства проектирования в зависимости от входящего потока. В отличие от классического подхода, в данной статье рассматривается возможность адаптивного сжатия исходного потока. Сложность алгоритма прямо пропорциональна длине исходного числового потока. Приведены числовые примеры.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F. Approximations with polynomial, trigonometric, exponential splines of the third order and boundary value problem (2020) International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 14, pp. 460-473. Цитировано 2 раз. DOI: 10.46300/9106.2020.14.61  
ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper is devoted to the construction of local approximations of functions of one and two variables using the polynomial, the trigonometric, and the exponential splines. These splines are useful for visualizing flows of graphic information. Here, we also discuss the parallelization of computations. Some attention is paid to obtaining two-sided estimates of the approximations using interval analysis methods. Particular attention is paid to solving the boundary value problem by using the polynomial splines and the trigonometric splines of the third and fourth order approximation. Using the considered splines, formulas for a numerical differentiation are constructed. These formulas are used to construct computational schemes for solving a parabolic problem. Questions of approximation and stability of the obtained schemes are considered. Numerical examples are presented.

Настоящая работа посвящена построению локальных приближений функций одной и двух переменных с использованием полиномиальных, тригонометрических и экспоненциальных сплайнов. Эти сплайны полезны для визуализации потоков графической информации. Здесь мы также обсуждаем распараллеливание вычислений. Некоторое внимание уделяется получению двусторонних оценок приближений с использованием методов интервального анализа. Особое внимание уделяется решению краевой задачи с использованием полиномиальных сплайнов и тригонометрических сплайнов третьего и четвертого порядка приближения. По рассмотренным сплайнам построены формулы численного дифференцирования. Эти формулы используются для построения вычислительных схем решения параболической задачи. Рассмотрены вопросы аппроксимации и устойчивости полученных схем. Приведены числовые примеры.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F., Narbutovskikh, I.I. Approximation by the third-order splines on uniform and non-uniform grids and image processing (2020) WSEAS Transactions on Mathematics, 19, pp. 65-73. Цитировано 2 раз. DOI: 10.37394/23206.2020.19.7

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, Russian Federation;

Saint Petersburg Lyceum 554, St. Petersburg, Russian Federation; St. Petersburg, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This work is one of a series of papers that is devoted to the further investigation of polynomial splines and trigonometric splines of the third order approximation. Polynomial basis splines are better known and therefore more commonly used. However, the use of trigonometric basis splines often provides a smaller approximation error. In some cases, the use of the trigonometric approximations is preferable to the polynomial approximations. Here we continue to compare these two types of approximation. The Lebesgue functions and constants are discussed for the polynomial splines and the trigonometric splines. The examples of the applications of the splines to image enlargement are given.

Данная работа является одной из серии работ, посвященных дальнейшему исследованию полиномиальных сплайнов и тригонометрических сплайнов третьего приближения. Полиномиальные базисные сплайны более известны и поэтому чаще используются. Однако использование тригонометрических базисных сплайнов часто дает меньшую ошибку аппроксимации. В некоторых случаях использование тригонометрических приближений предпочтительнее полиномиальных приближений. Здесь мы продолжаем сравнивать эти два типа приближения. Функции и константы Лебега обсуждаются для полиномиальных сплайнов и тригонометрических сплайнов. Приведены примеры применения сплайнов для увеличения изображения.

Burova, I.G., Domnin, N.S. On the solution of the fredholm equation with the use of quadratic integro-differential splines (2019) Lecture Notes in Electrical Engineering, 574, pp. 35-41. Цитирован(ы) 1 раз. DOI: 10.1007/978-3-030-21507-1\_6

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Currently there are a number of papers in which certain types of splines are used to solve the Fredholm equation. Now much attention is paid to the application of a new type of spline, the so-called integro-differential spline to the solution of various problems. In this paper we consider the solution of the Fredholm equation using polynomial integro-differential splines of the third order approximation. To calculate the integral in the formula of a quadratic integro-differential spline, we propose the corresponding quadrature formula. The results of numerical experiments are given.

В настоящее время существует ряд работ, в которых для решения уравнения Фредгольма используются определенные типы сплайнов. Сейчас большое внимание уделяется применению сплайна нового типа, так называемого интегро-дифференциального сплайна, для решения различных задач. В данной статье мы рассматриваем решение уравнения Фредгольма с помощью полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов третьего порядка приближения. Для вычисления интеграла в формуле квадратичного интегро-дифференциального сплайна предлагается соответствующая квадратурная формула. Приведены результаты численных экспериментов.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F. Interval estimation using integro-differential splines of the third order of approximation (2019) WSEAS Transactions on Mathematics, 18, pp. 153-160. Цитировано 4 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Interpolation by local splines in some cases gives a better result than other splines or interpolation by classical interpolation polynomials. Integro-differential splines are one of the types of local splines that use, in addition to the values of the functions at the nodes of the grid, integrals



over grid intervals. To construct an approximation on a finite interval, in order to improve the approximation quality, we use left or right integrodifferential splines near the ends of this interval. At some distance from the ends, besides the left or right splines, we can also use the middle integrodifferential splines. Sometimes it is not necessary to calculate the approximation of the function at intermediate points. Instead of calculating the approximation in many points it is sufficient to estimate only the upper and lower boundaries of the variety of the approximation on this interval. The paper discusses the estimation of the boundaries of approximation of functions using left, right and middle trigonometrical integro-differential splines of the third order of approximation. The process of constructing the basic splines is discussed. The approximation theorems are given. Unimprovable constants in the approximation inequalities are given. Numerical examples of construction of the approximations and interval estimation are given.

Интерполяция локальными сплайнами в некоторых случаях дает лучший результат, чем другие сплайны или интерполяция классическими интерполяционными полиномами. Интегро-дифференциальные сплайны - это один из типов локальных сплайнов, которые используют, помимо значений функций в узлах сетки, интегралы по интервалам сетки. Для построения аппроксимации на конечном интервале, чтобы улучшить качество приближения, мы используем левые или правые интегродифференциальные сплайны на концах этого интервала. На некотором расстоянии от концов промежутка, кроме левого или правого, мы можем также использовать средние интегро-дифференциальные сплайны. Иногда нет необходимости вычислять приближение функции в промежуточных точках. Вместо вычисления аппроксимации во многих точках достаточно оценить только верхнюю и нижнюю границы разнообразия приближения на этом интервале. В статье рассматривается оценка границ приближения функций с помощью левых, правых и средних тригонометрических интегро-дифференциальных сплайнов третьего порядка аппроксимации. Приведены аппроксимационные теоремы. Приведены неулучшаемые константы в аппроксимационных неравенствах. Приведены численные примеры построения аппроксимаций и интервальных оценок.

Burova, I.G., Doronina, A.G. Errors of approximation with polynomial splines of the fifth order (2019) Lecture Notes in Electrical Engineering, 489, pp. 39-46. DOI: 10.1007/978-3-319-75605-9\_6  
ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ:** This paper is a continuation of a series of papers devoted to the construction and investigation of the properties of integro-differential polynomial splines of the fifth order. It is supposed that values of function in grid nodes and values of integrals over intervals are known. Solving the system of linear algebraic equations, we find basic splines. An approximation of the function in this paper is constructed on every grid interval separately using values of the function in two adjacent grid nodes and the values of three integrals over intervals, and basic splines. We call this approximation an integro-differential spline and we call these basic splines integro-differential basic splines. The properties of interpolation with integro-differential polynomial basic splines are investigated. A comparison of the properties of integro-differential approximations for a different choice of integrals is presented. A comparison of the integro-differential approximation with approximation using polynomial splines of the Lagrangian type is made. Numerical examples are presented.

Данная статья является продолжением серии работ, посвященных построению и исследованию свойств интегро-дифференциальных полиномиальных сплайнов пятого порядка. Предполагается, что известны значения функции в узлах сетки и значения интегралов по интервалам. Решая систему линейных алгебраических уравнений, находим основные сплайны. Аппроксимация функции в этой статье строится на каждом интервале сетки отдельно с использованием значений функции в двух соседних узлах сетки и значений трех интегралов по интервалам и базовых сплайнов. Мы называем это приближение интегро-дифференциальным сплайном, а эти базовые сплайны - интегро-дифференциальными базовыми сплайнами. Исследуются свойства интерполяции интегро-дифференциальными полиномиальными базисными сплайнами. Приведено

сравнение свойств интегро-дифференциальных приближений при различном выборе интегралов. Проведено сравнение интегро-дифференциального приближения с приближением полиномиальными сплайнами лагранжевого типа. Приведены примеры

Burova, I.G., Narbutovskikh, I.I., Muzafarova, E.F. Image processing and the spline approximation of the third and fifth order (2019) International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 13, pp. 550-557. Цитировано 2 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Local splines and it's cubic polynomial splines, which are used traditionally, are used in solving many image processing problems. In this paper, we consider the use of local quadratic polynomial and trigonometric splines of the third order of approximation, as well as polynomial splines of the fifth order of approximation for image processing. The paper proposes an algorithm to increase the image (or its part) without loss of quality using local polynomial splines of the third and fifth order of approximation and trigonometric splines of the third order of approximation. This paper also developed an algorithm for compressing and restoring images using the considered splines. The theoretical background and results of numerical experiments are presented.

Локальные сплайны и кубические полиномиальные сплайны, которые используются традиционно, используются при решении многих задач обработки изображений. В данной статье рассматривается использование локальных квадратичных полиномиальных и тригонометрических сплайнов третьего порядка аппроксимации, а также полиномиальных сплайнов пятого порядка аппроксимации для обработки изображений. В статье предлагается алгоритм увеличения изображения (или его части) без потери качества с использованием локальных полиномиальных сплайнов третьего и пятого порядков аппроксимации и тригонометрических сплайнов третьего порядка аппроксимации. В данной статье также разработан алгоритм сжатия и восстановления изображений с использованием рассмотренных сплайнов. Приведены теоретические основы и результаты численных экспериментов.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F., Narbutovskikh, I.I. Local splines of the second and third order, complex-valued splines and image processing (2019) International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 13, pp. 419-429. Цитировано 4 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper is devoted to the local complex-valued spline interpolation in a circle and image processing using local polynomial and non-polynomial splines. We consider local complex-valued spline interpolation, constructed by using tensor product. For constructing the tensor product we use local basis splines of two variables: A radial variable and an angular variable. The approximation is constructed separately in each elementary segment, formed by two arcs and two line segments. For the approximation of a complex-valued function we use the values of the function in several nodes near this elementary segment and the basis splines. The order of the approximation depends on the properties of splines of one variable which we use in the tensor product. In this paper we suggest using local exponential, local trigonometrical and local polynomial splines of the second and third order of approximation. The local spline interpolation is the most convenient for the approximation and visualization of functions and they may be applied to solving various problems. In this paper we focus on the problem of enlarging images using the local splines.

Данная статья посвящена локальной комплекснозначной сплайновой интерполяции в окружности и обработке изображений с использованием локальных полиномиальных и неполиномиальных сплайнов. Мы рассматриваем локальную комплексную сплайн-интерполяцию, построенную с помощью тензорного произведения. Для построения тензорного произведения мы используем локальные базисные сплайны двух переменных: радиальной переменной и угловой переменной. Аппроксимация строится отдельно на каждом элементарном отрезке, образованном двумя дугами

и двумя отрезками прямых. Для аппроксимации комплекснозначной функции используются значения функции в нескольких узлах вблизи этого элементарного сегмента и базисных сплайнов. Порядок аппроксимации зависит от свойств сплайнов одной переменной, которые мы используем в тензорном произведении. В данной статье мы предлагаем использовать локальные экспоненциальные, локальные тригонометрические и локальные полиномиальные сплайны второго и третьего порядка аппроксимации. Локальная сплайн-интерполяция наиболее удобна для аппроксимации и визуализации функций и может применяться для решения различных задач. В этой статье мы сосредоточимся на проблеме увеличения изображений с помощью локальных сплайнов.

Burova, I.G., Ivanova, E.G., Kostin, V.A., Doronina, A.G. Trigonometric splines of the third order of approximation and interval estimation (2019) WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, 14, статья № 20, pp. 173-183. Цитировано 3 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, Department of Computational Mathematics, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: It is useful to apply interval estimates to improve the evaluation of reliability results of calculations, and therefore the evaluation of the reliability of mechanical structures. In this paper, interval estimates are used to establish the range of variation of a function and its derivatives As is known, the problem of the simultaneous approximation of a function and its derivatives cannot be solved using classical interpolation polynomials. In this paper, we consider the approximation of a function and its first derivative by using polynomial and trigonometric splines with the third order of approximation. In this case, the approximation of the first derivative turns out to be discontinuous at the nodes of the grid. The values of the constants in the estimates of the errors of approximation with the trigonometric and polynomial splines of the third order are given. It is shown that these constants cannot be reduced. To solve practical problems, it is often important not to calculate the values of the function and its derivatives in a number of nodes on the grid interval, but to estimate the range of change of the function on this interval. For the interval estimation of the approximation of function or its first derivative, we use the technique of working with real intervals from interval analysis. The algorithms for constructing the variation domain of the approximation of the function and the first derivative of this function are described. The results of the numerical experiments are given.

Полезно применять интервальные оценки для улучшения оценки достоверности результатов расчетов и, следовательно, оценки надежности механических конструкций. В этой статье интервальные оценки используются для установления диапазона изменения функции и ее производных. Как известно, проблема одновременного приближения функции и ее производных не может быть решена с помощью классических интерполяционных полиномов. В этой статье мы рассматриваем приближение функции и ее первой производной с помощью полиномиальных и тригонометрических сплайнов с третьим порядком приближения. В этом случае аппроксимация первой производной оказывается разрывной в узлах сетки. Приведены значения констант в оценках ошибок аппроксимации тригонометрическими и полиномиальными сплайнами третьего порядка. Показано, что эти постоянные не могут быть уменьшены. Для решения практических задач часто бывает важно не вычислять значения функции и ее производных в ряде узлов на сеточном интервале, а оценить диапазон изменения функции на этом интервале. Для интервальной оценки приближения функции или ее первой производной мы используем прием работы с реальными интервалами из интервального анализа. Описаны алгоритмы построения вариационной области приближения функции и первой производной этой функции. Приведены результаты численных экспериментов.

Burova, I.G., Ryabov, V.M., Kalnitskaia, M.A., Malevich, A.V. The interpolation method for calculating eigenvalues of matrices (2019) WSEAS Transactions on Systems and Control, 14, статья № 13, pp. 104-111. Цитировано 5 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab, 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The problem of solving systems of linear algebraic equations (SLAEs) is connected with finding the eigenvalues of the matrix of the system. Often it is necessary to solve SLAEs with positive definite symmetric matrices. The eigenvalues of such matrices are real and positive. Here we propose an interpolation method for finding eigenvalues of such matrices. The proposed method can also be used to calculate the real eigenvalues of an arbitrary matrix with real elements. This method uses splines of Lagrangian type of fifth order and/or polynomial integro-differential splines of fifth order. To calculate the eigenvalue, it is necessary to calculate several determinants and solve the nonlinear equation. Examples of numerical experiments are given.

Проблема решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) связана с нахождением собственных значений матрицы системы. Часто необходимо решать СЛАУ с положительно определенными симметричными матрицами. Собственные значения таких матриц действительны и положительны. Здесь мы предлагаем метод интерполяции для нахождения собственных значений таких матриц. Предлагаемый метод также может быть использован для вычисления действительных собственных значений произвольной матрицы с действительными элементами. В этом методе используются сплайны лагранжевого типа пятого порядка и / или полиномиальные интегро-дифференциальные сплайны пятого порядка. Чтобы вычислить собственное значение, необходимо вычислить несколько определителей и решить нелинейное уравнение. Приведены примеры численных экспериментов.

Dem'yanovich, Y.K., Burova, I.G., Evdokimova, T.O., Lebedeva, A.V., Doronina, A.G. Embedded spaces of Hermite splines (2019) WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, 14, pp. 222-234.

ОРГАНИЗАЦИИ: Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab, 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper is devoted to the processing of large numerical signals which arise in different technical problems (for example, in positioning systems, satellite maneuvers, in the prediction a lot of phenomenon, and so on). The main tool of the processing is polynomial and nonpolynomial splines of the Hermite type, which are obtained by the approximation relations. These relations allow us to construct splines with approximate properties, which are asymptotically optimal as to N-width of the standard compact sets. The interpolation properties of the mentioned splines are investigated. Such properties give opportunity to obtain the solution of the interpolation Hermite problems without solution of equation systems. The calibration relations on embedded grids are established in the case of deleting the grid knots and in the case of the addition of the last one. A consequence of the obtained results is the embedding of the Hermite spline spaces on the embedded grids. The mentioned embedding allows us to obtain wavelet decomposition of the Hermite spline spaces.

Эта статья посвящена обработке больших последовательностей числовых сигналов, которые возникают в различных технических задачах (например, в системах позиционирования, маневрах спутников, при прогнозировании множества явлений и т. д.) Основным инструментом обработки являются полиномиальные и неполиномиальные сплайны типа Эрмита, которые получаются с помощью аппроксимационных соотношений. Эти соотношения позволяют строить сплайны со свойствами приближения, асимптотически оптимальными по N-поперечнику стандартных компактов. Исследованы интерполяционные свойства указанных сплайнов. Такие свойства дают возможность получить решение интерполяционных задач Эрмита без решения систем уравнений. На встроенных сетках устанавливаются калибровочные соотношения как в случае удаления узла сетки, так и в случае добавления последнего. Следствием полученных результатов являются условия вложенности пространств сплайнов Эрмита ассоциированных с вложенными сетками. Указанное вложение позволяет получить вейвлетное разложение сплайновых пространств Эрмита.

Burova, I.G., Evdokimova, T.O., Rodnikova, O.V. Integro-Differential Polynomial and Trigonometrical Splines and Quadrature Formulas (2018) Computational Mathematics and Mathematical Physics, 58 (7), pp. 1011-1024. DOI: 10.1134/S0965542518070047

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Abstract: This work is one of many that are devoted to the further investigation of local interpolating polynomial splines of the fifth order approximation. Here, new polynomial and trigonometrical basic splines are presented. The main features of these splines are the following: the approximation is constructed separately for each grid interval (or elementary rectangular), the approximation constructed as the sum of products of the basic splines and the values of function in nodes and/or the values of its derivatives and/or the values of integrals of this function over subintervals. Basic splines are determined by using a solving system of equations which are provided by the set of functions. It is known that when integrals of the function over the intervals is equal to the integrals of the approximation of the function over the intervals then the approximation has some physical parallel. The splines which are constructed here satisfy the property of the fifth order approximation. Here, the one-dimensional polynomial and trigonometrical basic splines of the fifth order approximation are constructed when the values of the function are known in each point of interpolation. For the construction of the spline, we use the discrete analogues of the first derivative and quadrature with the appropriate order of approximation. We compare the properties of these splines with splines which are constructed when the values of the first derivative of the function are known in each point of interpolation and the values of integral over each grid interval are given. The one-dimensional case can be extended to multiple dimensions through the use of tensor product spline constructs. Numerical examples are represented.

Эта работа - одна из многих, посвященных дальнейшему исследованию локальных интерполяционных полиномиальных сплайнов пятого приближения. Здесь представлены новые полиномиальные и тригонометрические базовые сплайны. Основными особенностями этих сплайнов являются следующие: аппроксимация строится отдельно для каждого интервала сетки (или элементарного прямоугольника), аппроксимация строится как сумма произведений основных сплайнов и значений функции в узлах и / или значений ее производные и / или значения интегралов этой функции по подынтервалам. Базовые сплайны определяются с помощью решения системы уравнений, которые предоставляются набором функций. Известно, что когда интегралы функции по интервалам равны интегралам от приближения функции по интервалам, то приближение имеет некоторую физическую параллель. Построенные здесь сплайны удовлетворяют свойству пятого приближения. Здесь одномерные полиномиальные и тригонометрические базовые сплайны пятого порядка приближения строятся, когда значения функции известны в каждой точке интерполяции. Для построения сплайна используются дискретные аналоги первой производной и квадратуры с соответствующим порядком аппроксимации. Мы сравниваем свойства этих сплайнов со сплайнами, которые строятся, когда значения первой производной функции известны в каждой точке интерполяции и заданы значения интеграла по каждому интервалу сетки. Одномерный случай может быть расширен до нескольких измерений за счет использования сплайновых конструкций тензорного произведения.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F., Zhilin, D.E. About adaptive grids construction (2018) WSEAS Transactions on Mathematics, 17, pp. 340-351. Цитировано 2 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St.Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab, St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: One of the important tasks of interpolation is the good selection of interpolation nodes. As is well known, the roots of the Chebyshev polynomial are optimal ones for interpolation with algebraic polynomials on the interval  $[-1,1]$ . Nevertheless, there are still some difficulties in constructing the grid of nodes when the number of points tend to infinity. Here we offer the formula for constructing the interpolation nodes for a rapidly increasing function or decreasing function. The formula takes into account the local behavior of the function on the previous three grid nodes, and it

is based on the interpolation by local quadratic polynomial splines. Particular attention is paid to the interpolation of functions on radial-ring grids.

Одна из важных задач интерполяции - хороший выбор узлов интерполяции. Как известно, корни многочлена Чебышева являются оптимальными для интерполяции алгебраическими многочленами на интервале  $[-1,1]$ . Тем не менее, существуют трудности с построением сетки узлов, когда количество точек стремится к бесконечности. Здесь мы предлагаем формулу для построения узлов интерполяции для быстро возрастающей или убывающей функции. Формула учитывает локальное поведение функции на трех предыдущих узлах сетки и основана на интерполяции локальными квадратичными полиномиальными сплайнами. Особое внимание уделяется интерполяции функций на радиально-кольцевых сетках.

Burova, I.G., Kalnitskaia, M.A., Malevich, A.V. On the numerical solution of system of linear algebraic equations with positive definite symmetric ill-posed matrices (2018) WSEAS Transactions on Mathematics, 17, pp. 13-19. Цитирован(ы) 1 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: Department of Computational Mathematics, Saint Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: In this paper, we present the results of a numerical solution to ill-posed systems of linear algebraic equations (SLAEs) with positive definite symmetric matrices by a regularization method. In the paper it is shown that for the regularization of a computational process by the Tikhonov method it is sufficient to replace matrix of the system by matrix of special type.

В данной статье представлены результаты численного решения некорректных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с положительно определенными симметричными матрицами методом регуляризации. В статье показано, что для регуляризации вычислительного процесса методом Тихонова достаточно заменить матрицу системы на матрицу специального типа.

Burova, I.G., Domnin, N.S., Vezhlev, A.E., Lebedeva, A.V., Pakulina, A.N. On the solution of the Fredholm equation of the second kind (2018) WSEAS Transactions on Mathematics, 17, pp. 319-328. Цитировано 4 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: - The present paper is devoted to the application of local polynomial integro-differential splines to the solution of integral equations, in particular, to the solution of the integral equations of Fredholm of the second kind. To solve the Fredholm equation of the second kind, we apply local polynomial integro-differential splines of the second and third order of approximation. To calculate the integral in the formulae of a piecewise quadratic integro-differential spline and piecewise linear integro-differential spline, we propose the corresponding quadrature formula. The results of the numerical experiments are given.

Настоящая работа посвящена применению локальных полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов к решению интегральных уравнений, в частности, к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для решения уравнения Фредгольма второго рода применяются локальные полиномиальные интегро-дифференциальные сплайны второго и третьего порядка аппроксимации. Для вычисления интеграла в формулах кусочно-квадратичного интегро-дифференциального сплайна и кусочно-линейного интегро-дифференциального сплайна предлагается соответствующая квадратурная формула. Приведены результаты численных экспериментов.

Burova, I.G., Rodnikova, O.V. Integro-differential polynomial and trigonometrical splines and quadrature formulae (2017) WSEAS Transactions on Mathematics, 16, pp. 11-18. Цитировано 9 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.-Petersburg, 199034, Russian Federation

**КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ:** This work is one of many that are devoted to the further investigation of local interpolating polynomial splines of the fifth order approximation. Here, new polynomial and trigonometrical basic splines are presented. The main features of these splines are the following; the approximation is constructed separately for each grid interval (or elementary rectangular), the approximation constructed as the sum of products of the basic splines and the values of function in nodes and/or the values of its derivatives and/or the values of integrals of this function over subintervals. Basic splines are determined by using a solving system of equations which are provided by the set of functions. It is known that when integrals of the function over the intervals is equal to the integrals of the approximation of the function over the intervals then the approximation has some physical parallel. The splines which are constructed here satisfy the property of the fifth order approximation. Here, the one-dimensional polynomial and trigonometrical basic splines of the fifth order approximation are constructed when the values of the function are known in each point of interpolation. For the construction of the spline, we use the discrete analogues of the first derivative and quadrature with the appropriate order of approximation. We compare the properties of these splines with splines which are constructed when the values of the first derivative of the function are known in each point of interpolation and the values of integral over each grid interval are given. The one-dimensional case can be extended to multiple dimensions through the use of tensor product spline constructs. Numerical examples are represented.

Эта работа - одна из многих, посвященных дальнейшему исследованию локальных интерполяционных полиномиальных сплайнов пятого приближения. Здесь представлены новые полиномиальные и тригонометрические базовые сплайны. Основные особенности этих сплайнов следующие: аппроксимация строится отдельно для каждого интервала сетки (или элементарного прямоугольника), аппроксимация строится как сумма произведений базовых сплайнов и значений функции в узлах и / или значений ее производных и / или значений интегралов от этой функции по подынтервалам. Базовые сплайны определяются с помощью решения системы уравнений, которые предоставляются набором функций. Известно, что когда интегралы функции по интервалам равны интегралам от приближения функции по интервалам, то приближение имеет некоторую физическую параллель. Построенные здесь сплайны удовлетворяют свойству пятого приближения. Здесь одномерные полиномиальные и тригонометрические базовые сплайны пятого порядка приближения строятся, когда значения функции известны в каждой точке интерполяции. Для построения сплайна используются дискретные аналоги первой производной и квадратуры с соответствующим порядком аппроксимации. Мы сравниваем свойства этих сплайнов со сплайнами, которые строятся, когда значения первой производной функции известны в каждой точке интерполяции и заданы значения интеграла по каждому интервалу сетки. Одномерный случай может быть расширен до нескольких измерений за счет использования сплайновых конструкций тензорного произведения. Представлены числовые примеры.

Burova, I.G., Doronina, A.G., Miroshnichenko, I.D. A Comparison of Approximations with left, right and middle Integro-Differential Polynomial Splines of the Fifth Order (2017) WSEAS Transactions on Mathematics, 16, pp. 339-349. Цитировано 5 раз.

**ОРГАНИЗАЦИИ:** Department of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.-Petersburg, 199034, Russian Federation

**КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ:** This paper deals with the construction of integro-differential polynomial splines of the fifth order on a uniform grid of nodes. It is supposed that values of function in nodes and the values of integrals over intervals are known. The properties of the left, the right and the middle integro-differential polynomial splines are investigated. The approximation with these splines is constructed on every grid interval separately. The results of numerical approximation by the left, the right, and the middle integro-differential splines show that the middle splines are preferable. Errors of approximation of the left, the right and the middle integro-differential polynomial splines of one variable of the fifth order are given. The approximation of functions of two variables is constructed using the tensor product. Numerical examples are presented.

В статье рассматривается построение интегро-дифференциальных полиномиальных сплайнов пятого порядка на равномерной сетке узлов. Предполагается, что известны значения функции в узлах и значения интегралов по интервалам. Исследованы свойства левых, правых и средних интегро-дифференциальных полиномиальных сплайнов. Аппроксимация этими сплайнами строится на каждом интервале сетки отдельно. Результаты численной аппроксимации левым, правым и средним интегродифференциальными сплайнами показывают, что средние сплайны предпочтительнее. Приведены погрешности аппроксимации левого, правого и среднего интегродифференциальных полиномиальных сплайнов одной переменной пятого порядка. Аппроксимация функций двух переменных строится с помощью тензорного произведения. Приведены примеры.

Dem'yanovich, Y.K. Orthogonal Basis for Wavelet Flows (2016) Journal of Mathematical Sciences (United States), 213 (4), pp. 530-550. DOI: 10.1007/s10958-016-2723-3  
ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We present an orthogonal basis for discrete wavelets in the case of comb structure of the spline-wavelet decomposition and estimate the time of computation of this decomposition by a concurrent computing system with computer communication surrounding taken into account. Мы представляем ортогональный базис для дискретных вейвлетов в случае гребенчатой структуры сплайн-вейвлетного разложения и оцениваем время вычисления этого разложения на параллельной вычислительной системе с учетом окружающей коммуникационной среды.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F. Approximation with Polynomial and Trigonometric Splines of the Third Order and the Interval Estimation (2020) Proceedings - 24th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, CSCC 2020, статья № 9402649, pp. 117-120. DOI: 10.1109/CSCC49995.2020.00028, Scopus, SJR2020 0.13

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This work is one of a series of papers that is devoted to the further investigation of polynomial and trigonometric splines of the third order approximation. Polynomial basis splines are better known and therefore more commonly used. However, the use of trigonometric basis splines often provides a smaller approximation error. Here we discuss the interval estimation with the polynomial or trigonometric basis splines which are useful for the approximation of functions with one or two variables. For each grid interval we construct the approximation separately. We construct the interval estimation of approximation also separately on the each grid interval. The one-dimensional polynomial or trigonometric basis splines of the third order approximation are constructed when the values of the function are known in each point of interpolation. Numerical examples are represented.

Данная работа является одной из серии статей, посвященных дальнейшему исследованию полиномиальных и тригонометрических сплайнов третьего порядка приближения. Полиномиальные базисные сплайны более известны и поэтому чаще используются. Однако использование тригонометрических базисных сплайнов часто дает меньшую ошибку аппроксимации. Здесь мы обсуждаем интервальную оценку с помощью полиномиальных или тригонометрических базисных сплайнов, которые полезны для приближения функций с одной или двумя переменными. Для каждого интервала сетки построим аппроксимацию отдельно. Построим интервальную оценку аппроксимации также отдельно на каждом интервале сетки. Одномерные полиномиальные или тригонометрические базисные сплайны третьего порядка приближения строятся, когда значения функции известны в каждой точке интерполяции. Представлены числовые примеры.

Burova, I.G., Ryabov, V.M. On the solution of fredholm integral equations of the first kind (2020) WSEAS Transactions on Mathematics, 19, pp. 699-708. Цитирован(ы) 1 раз, Q4 Scopus, SJR2020 0.21



ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: As it is well known the problem of solving the Fredholm integral equation of the first kind belongs to the class of ill-posed problems. The Tikhonov regularization method is well known. This method is usually applied to an integral equation and a system of linear algebraic equations. The authors firstly propose to reduce the integral equation of the first kind to a system of linear algebraic equations. This system is usually extremely ill-posed. Therefore, it is necessary to carry out the Tikhonov regularization for the system of equations. In this paper, to form a system of linear algebraic equations, local polynomial and non-polynomial spline approximations of the second order of approximation are used. The results of numerical experiments are presented.

Как известно, задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относится к классу некорректных задач. Метод регуляризации Тихонова хорошо известен. Этот метод обычно применяется к интегральному уравнению и системе линейных алгебраических уравнений. Авторы в первую очередь предлагают свести интегральное уравнение первого рода к системе линейных алгебраических уравнений. Эта система обычно крайне некорректна. Следовательно, необходимо провести тихоновскую регуляризацию системы уравнений. В данной работе для формирования системы линейных алгебраических уравнений используются локально-полиномиальные и неполиномиальные сплайн-аппроксимации второго порядка аппроксимации. Приведены результаты численных экспериментов.

Dem'yanovich, Y.K. Adaptive Haar Type Wavelets on Manifolds (2020) Journal of Mathematical Sciences (United States), 251 (6), pp. 797-813. DOI: 10.1007/s10958-020-05130-3 Цитирован(ы) 1 раз.  
ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We consider embedded Haar type spaces associated with cell subdivisions of a smooth manifold. We use an adaptivity criterion connected with a nonnegative set function possessing certain monotonicity properties. We propose an algorithm for constructing embedded spaces satisfying the adaptivity criterion. To construct the wavelet decomposition, we apply the nonclassical approach and obtain the adaptive wavelet decomposition of the Haar type space on the manifold. Some model examples are given.

Мы рассматриваем вложенные пространства типа Хаара, ассоциированные с клеточными подразделениями гладкого многообразия. Мы используем критерий адаптивности, связанный с неотрицательной функцией множества, обладающей определенными свойствами монотонности. Предлагается алгоритм построения вложенных пространств, удовлетворяющих критерию адаптивности. Для построения вейвлет-разложения мы применяем неклассический подход и получаем адаптивное вейвлет-разложение пространства типа Хаара на многообразии. Приведены некоторые модельные примеры.

Dem'yanovich, Y.K. Wavelets in Generalized Haar Spaces (2020) Journal of Mathematical Sciences (United States), 251 (5), pp. 615-634. DOI: 10.1007/s10958-020-05120-5 Цитирован(ы) 1 раз.  
ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We consider wavelet decompositions of Haar type spaces on arbitrary nonuniform grids by methods of the nonclassical theory of wavelets. The number of nodes of the original (nonuniform) grid can be arbitrary, and the main grid can be any subset of the original one. We propose decomposition algorithms that take into account the character of changes in the original numerical flow. The number of arithmetical operations is proportional to the length of the original flow, and successive real-time processing is possible for the original flow. We propose simple decomposition and reconstruction algorithms leading to formulas where the coefficients are independent of the grid and are equal to 1 in absolute value.

Мы рассматриваем вейвлет-разложения пространств типа Хаара на произвольных неоднородных сетках методами неклассической теории всплесков. Количество узлов исходной (неоднородной) сетки может быть произвольным, а основная сетка может быть любым подмножеством исходной. Предлагаются алгоритмы декомпозиции, учитывающие характер изменения исходного числового потока. Количество арифметических операций пропорционально длине исходного потока, и для исходного потока возможна последовательная обработка в реальном времени. Мы предлагаем простые алгоритмы декомпозиции и реконструкции, приводящие к формулам, в которых коэффициенты не зависят от сетки и равны 1 по модулю.

Dem'yanovich, Yu.K., Evdokimova, T.O., Ivantsova, O.N., Lebedinskii, D.M., Ponomareva, A.Y. Singular splines (2020) AIP Conference Proceedings, 2293, статья № 420029, DOI: 10.1063/5.0031734 ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Singular splines are required for approximation of functions with point singularities. This paper develops a concept of generalized smoothness in the case of the mentioned splines. Generalized smoothness is defined as equality of values for two functionals with local supports. The splines are constructed by the suitable approximation relations. The last ones are obtained by application of the concept to the right part of the relations (i.e. to generating vector function). Sufficient conditions of coordinate spline existence are established. The generalized smoothness of the coordinate splines has as a consequence of embedded spline spaces constructed on embedded grids.

Сингулярные сплайны необходимы для приближения функций с точечными особенностями. В данной статье развивается концепция обобщенной гладкости в случае упомянутых сплайнов. Обобщенная гладкость определяется как равенство значений двух функционалов с локальными носителями. Сплайны строятся с помощью подходящих аппроксимационных соотношений. Последние получаются применением этого понятия к правой части отношений (т.е. к производящей вектор-функции). Установлены достаточные условия существования координатного сплайна. Обобщенная гладкость координатных сплайнов является следствием вложенности пространств сплайнов, построенных на вложенных сетках.

Dem'yanovich, Y.K., Safonova, T.A., Terekhov, M.A. Wavelet Decomposition for Generalized Haar Spaces (2020) Proceedings - 24th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, CICC 2020, статья № 9402623, pp. 121-125. DOI: 10.1109/CICC49995.2020.00029 ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper is devoted to the numerical information flows and piecewise constant splines connected with them. The spline spaces and their wavelet decompositions are discussed. The approximation relations for such splines turn into the decomposition of the unit. In the case of a uniform grid, the coordinate splines of this type are often called the Haar functions. The numerical flows are associated with irregular spline grids. The spaces of the piecewise constant splines associated with an irregular grid are called spaces of the Haar type. This paper discusses the calibration relations, embedding of the Haar type spaces and their wavelet decompositions. The structure of the decomposition/reconstruction algorithms are done. The cases of the finite and the infinite flows are considered.

Данная статья посвящена числовым информационным потокам и связанным с ними кусочно-постоянным сплайнам. Обсуждаются сплайн-пространства и их вейвлет-разложения. Аппроксимационные соотношения для таких сплайнов превращаются в декомпозицию единицы. В случае равномерной сетки координатные сплайны этого типа часто называют функциями Хаара. Числовые потоки связаны с нерегулярными сплайн-сетками. Пространства кусочно-постоянных сплайнов, связанных с нерегулярной сеткой, называются пространствами типа Хаара. В этой статье обсуждаются калибровочные соотношения, вложение пространств типа Хаара и их вейвлет-

разложения. Составлены алгоритмы декомпозиции / реконструкции. Рассмотрены случаи конечного и бесконечного потоков.

Dem'yanovich, Y.K., Burova, I.G. Adaptive Approximation by General Haar's Spaces (2020) Proceedings - 24th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, CSCC 2020, статья № 9402490, pp. 147-152. DOI: 10.1109/CSCC49995.2020.00034  
ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Embedded spaces of Haar type on arbitrary irregular grids are discussed. The mentioned spaces are selected adaptively depending on the initial numerical flow. To expand the criteria for adaptability, two types of pseudo-measure are introduced. One type of pseudo-measure is defined on the segments of the real axis, and the other type is set on the subsets of the initial grid. Introduced concepts are used to construct embedded the Haar spaces with adaptivity properties in the norms of the spaces  $C$ . The approximate properties are determined by constructed spaces. The computational complexity of the obtained algorithm is investigated. The complexity is directly proportional to the length of the initial number flow.

Обсуждаются вложенные пространства типа Хаара на произвольных нерегулярных сетках. Указанные пространства выбираются адаптивно в зависимости от исходного числового потока. Чтобы расширить критерии адаптивности, вводятся два типа псевдомеры. Один тип псевдомеры определяется на сегментах действительной оси, а другой тип устанавливается на подмножествах исходной сетки. Введенные понятия используются для построения вложенных пространств Хаара со свойствами адаптивности в нормы пространства  $C$ . Приближенные свойства определяются построенными пространствами. Исследована вычислительная сложность полученного алгоритма. Сложность прямо пропорциональна длине исходного числового потока.

Dem'yanovich, Y.K., Evdokimova, T.O., Ivantsova, O.N., Lebedinskii, D.M., Ponomareva, A.Y. On Construction of Singular Splines (2020) Proceedings - 24th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, CSCC 2020, статья № 9402424, pp. 135-139. DOI: 10.1109/CSCC49995.2020.00032

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: One of the approaches to the problem of approximating functions with a singularity is the creation of an approximating apparatus based on splines with the same feature. For spline-wavelet decomposition of spline spaces it is important that the property of the embedding of these spaces is associated with the embedding grids. In this paper the approximation relations are considered to determine coordinate splines with a predefined singularity. The concept of generalized smoothness is introduced. It allows us to consider functions with singularity as generalized smooth functions. Corresponding approximation relations are constructed. The existence and uniqueness of coordinate splines with the mentioned feature are established. The linear shells of the coordinate splines are spaces with the property of embedding on embedding grids.

Одним из подходов к проблеме приближения функций с особенностью является создание аппроксимирующего аппарата на основе сплайнов с такой же особенностью. Для сплайн-вейвлетного разложения пространств сплайнов важно, чтобы свойство вложения этих пространств было связано с вложенными сетками. В данной статье рассматриваются аппроксимационные соотношения для определения координатных сплайнов с заданной особенностью. Вводится понятие обобщенной гладкости. Это позволяет рассматривать функции с особенностью как обобщенные гладкие функции. Построены соответствующие аппроксимационные соотношения. Установлено существование и единственность координатных сплайнов с указанным признаком. Линейные оболочки координатных сплайнов - это пространства со свойством вложенности на вложенных сетках.

Dem'yanovich, Y.K., Lebedinskiĭ, D.M., Lebedinskaya, N.A. Two-Sided Estimates of Some Coordinate Splines (2016) Journal of Mathematical Sciences (United States), 216 (6), pp. 770-782. Цитировано 2 раз. DOI: 10.1007/s10958-016-2941-8

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Two-sided estimates for the continuously differentiable coordinate splines of the second order are established, and sufficient conditions of their nonnegativity are provided. The results obtained are applied to trigonometric splines.

Установлены двусторонние оценки для непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов второго порядка и приведены достаточные условия их неотрицательности. Полученные результаты применяются к тригонометрическим сплайнам.

Dem'yanovich, Y.K. On Adaptive Splines (2020) Proceedings - 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Science and Engineering, MACISE 2020, статья № 9195543, pp. 304-307. DOI: 10.1109/MACISE49704.2020.00064

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The paper discusses various methods of adaptive spline approximations for the flow of function values. The number of  $K$  knots in the adaptive grid determines the required amount of memory for storage of compression results. The number of  $M$  knots of the original grid characterizes the number of operations required to obtain adaptive compression. In the case of access to the derivative values the number of digital operations is proportional to the number  $M$ . If it does not have access to the last ones then the number of required operations has the order of  $M^2$  (in the general case). If additionally the approximated flow is convex, then the number of required operations has the order of  $M \log_2 M$ . In all cases the result requires the computer memory amount of the order of  $K$ .

В статье обсуждаются различные методы адаптивных сплайн-аппроксимаций потока значений функций. Количество  $K$  узлов в адаптивной сетке определяет необходимый объем памяти для хранения результатов сжатия. Количество  $M$  узлов исходной сетки характеризует количество операций, необходимых для получения адаптивного сжатия. В случае доступа к производным значениям количество цифровых операций пропорционально числу  $M$ . Если он не имеет доступа к последним, то количество требуемых операций имеет порядок  $M^2$  (в общем случае). Если дополнительно аппроксимируемый поток выпуклый, то количество требуемых операций имеет порядок  $M \log_2 M$ . Во всех случаях для получения результата требуется объем памяти компьютера порядка  $K$ .

Demjanovich, Y.K. On complexity of adaptive splines (2020) International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 14, pp. 607-615. Цитировано 3 раз. DOI: 10.46300/9106.2020.14.78

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The paper discusses various methods of adaptive spline approximations for the flow of function values. It is considered an adaptive compression algorithm, which, for a priori given, has the properties 1) the complexity of the algorithm is proportional to the length of the original flow, 2) by the piecewise linear interpolation of the compression result, it is possible to restore the original flow with an accuracy of 3) the compression result is close to optimal and has  $O(M)$  of arithmetic operations. The effectiveness of this approach is demonstrated on rapidly changing initial flows of numerical information in the digital experiment. In addition, the paper presents an exact two-sided estimate for the number  $O(M^2)$  of arithmetic operations for the optimal solution of the problem of compressing an informational numerical flow of length  $M$  with the possibility of recovering this flow with a predetermined accuracy. Provided that the original flow is convex, a compression algorithm is developed with an accurate

twosided estimate of the number  $O(M \log 2M)$  and with the possibility of recovery with a prescribed accuracy.

В статье обсуждаются различные методы адаптивных сплайн-аппроксимаций потока значений функций. Рассматривается адаптивный алгоритм сжатия, который априори обладает следующими свойствами: 1) сложность алгоритма пропорциональна длине  $M$  исходного потока, 2) по кусочно-линейной интерполяции результата сжатия возможно восстановления исходного потока с априори заданной точностью 3) результат сжатия близок к оптимальному и имеет  $O(M)$  арифметических операций. Эффективность этого подхода демонстрируется на быстро меняющихся начальных потоках числовой информации в цифровом эксперименте. Кроме того, в статье представлена точная двусторонняя оценка количества  $O(M \times M)$  арифметических операций для оптимального решения задачи сжатия информационного числового потока длины  $M$  с возможностью восстановления этого потока с заданной точностью. При условии, что исходный поток является выпуклым, разработан алгоритм сжатия с точной двухсторонней оценкой с  $O(M \log M)$  арифметических действий и с возможностью восстановления с заданной точностью.

Demjanovich, Y.K., Evdokimova, T.O., Ivancova, O.N., Lebedinskii, D.M., Ponomareva, A.Y. On wavelet decomposition of the singular splines (2020) International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 14, pp. 571-579. Цитировано 3 раз. DOI: 10.46300/9106.2020.14.73 ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: One of the approaches to the problem of approximating functions with a singularity is the creation of an approximating apparatus based on splines with the same feature. For the wavelet decomposition of spline spaces it is important that the property of the embedding of these spaces is associated with embedding grids. The purpose of this paper is to consider ways of constructing spaces of splines with a predefined singularity and obtain their wavelet decomposition. Here the concept of generalized smoothness is used, within which the mentioned singularity is generalized smooth. This approach leads to the construction of a system of embedded spaces on embedded grids. A spline-wavelet decomposition of mentioned spaces is presented. Reconstruction formulas are done.

Одним из подходов к проблеме приближения функций с особенностью является создание аппроксимирующего аппарата на основе сплайнов с таким же признаком. Для вейвлет-разложения пространств сплайнов важно, чтобы свойство вложенности этих пространств было связано с встраиваемыми сетками. Цель данной статьи - рассмотреть способы построения пространств сплайнов с заданной особенностью и получить их вейвлет-разложение. Здесь используется понятие обобщенной гладкости, в рамках которой указанная особенность является обобщенно гладкой. Такой подход приводит к построению системы вложенных пространств на вложенных сетках. Представлено сплайн-вейвлетное разложение упомянутых пространств. Представлены формулы реконструкции.

Demjanovich, A.Y.K., Safonova, T.A., Terekhov, M.A., Belyakova, V., Le, B.T.N. The generalized haar spaces and their adaptive decomposition (2020) International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 14, pp. 548-560. Цитировано 3 раз. DOI: 10.46300/9106.2020.14.71 ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper is devoted to the numerical information flows and adaptive decompositions of the general Haar functions connected with them. The aim of this paper is to propose an adaptive wavelet decomposition using an adaptive compression algorithm for a flow of numerical information of length  $M$  with complexity  $O(M)$  and with a given precision of  $\epsilon > 0$ . The numerical flows are associated with irregular spline grids. This paper discusses the calibration relations, the embedding of the general Haar spaces and their wavelet decompositions. The structure of the decomposition/reconstruction algorithms are done. The cases of the finite and the infinite flows are considered. The paper discusses various methods of adaptive Haar approximations for the flow of function values.

Assuming that the values of the first derivative of the approximated function is known (exactly or approximately), the complexity of using an adaptive grid is estimated for a priori specified approximation accuracy. The number of  $K$  knots in the adaptive grid determine the required amount of memory for storage of the compression results. The number of  $M$  knots of the initial grid characterizes the number of operations required to obtain the adaptive compression. In the case of access to the derivative values (or their approximations) the number of digital operations is proportional to the number  $M$ . If it does not have access to the last ones then the number of required operations has the order of  $M^2$  (in the general case). If additionally, the approximated flow is convex, then the number of required operations has the order of  $M \log 2M$ . In all cases the result requires the computer memory amount to be of the order of  $K$ .

Данная статья посвящена числовым информационным потокам и адаптивным разложениям связанных с ними общих функций Хаара. Целью данной статьи является предложение адаптивного вейвлет-разложения с использованием алгоритма адаптивного сжатия для потока числовой информации длины  $M$  со сложностью  $O(M)$  и заданной точностью  $\epsilon > 0$ . Числовые потоки связаны с нерегулярными сплайновыми сетками. В этой статье обсуждаются калибровочные соотношения, вложение общих пространств Хаара и их вейвлетные разложения. Составлены алгоритмы декомпозиции / реконструкции. Рассмотрены случаи конечного и бесконечного потоков. В статье обсуждаются различные методы адаптивных аппроксимаций Хаара для потока значений функций. Предполагая, что значения первой производной аппроксимируемой функции известны (точно или приближенно), сложность использования адаптивной сетки оценивается для априори заданной точности аппроксимации. Количество  $K$  узлов в адаптивной сетке определяет необходимый объем памяти для хранения результатов сжатия. Количество  $M$  узлов исходной сетки характеризует количество операций, необходимых для получения адаптивного сжатия. В случае доступа к значениям производных (или к их приближениям) количество цифровых операций пропорционально числу  $M$ . Если нет доступа к последним, то количество требуемых операций имеет порядок  $M \times M$  (в общем случае). Если дополнительно известно, что аппроксимируемый поток выпуклый, то количество требуемых операций имеет порядок  $M \times \log M$ . Во всех случаях для хранения результата требуется компьютерная память порядка  $K$ .

Dem'yanovich, Y.K. Embedding of spaces and wavelet decomposition (2020) St. Petersburg Mathematical Journal, 31 (3), pp. 435-453. DOI: 10.1090/SPMJ/1607

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Necessary and sufficient conditions of generalized smoothness (called pseudosmoothness) are found for coordinate functions of the finite element method (FEM). Embedding of FEM spaces on embedded subdivisions is discussed. Approximation relations on a differentiable manifold are considered. The concept of pseudosmoothness is formulated in terms of the coincidence of values for linear functionals on functions in question. The concept of maximum pseudosmoothness is introduced. Embedding criteria for spaces on embedded subdivisions are given. Wavelet expansion algorithms are developed for the spaces mentioned above.

Найдены необходимые и достаточные условия обобщенной гладкости (называемой псевдогладкостью) для координатных функций метода конечных элементов (МКЭ). Обсуждается вложение пространств МКЭ на вложенных подразделениях. Рассмотрены аппроксимационные соотношения на дифференцируемом многообразии. Понятие псевдогладкости формулируется в терминах совпадения значений линейных функционалов на рассматриваемых функциях. Вводится понятие максимальной псевдогладкости. Приведены критерии вложения пространств на вложенных подразделениях. Для упомянутых выше пространств разработаны алгоритмы вейвлет-разложения.

Dem'yanovich, Y.K., Fefelov, A.A. Finding and visualizing of limit cycles (2020) CEUR Workshop Proceedings, 2556, pp. 108-111.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The article reflects a study aimed at using a parallel computing system for automated retrieval and visualization of cycles of a quadratic system of two differential equations. The study was conducted in the seven-dimensional space of parameters - system coefficients and initial data of the Cauchy problem. It is very important for sustainable operation of transport systems. To implement the calculations, supercomputers of Moscow State University were remotely used. Visualization of the results carried out on Hewlett Packard personal computers. The developed software model is applicable to weaning and visualization of cycles for different systems of two differential equations.

В статье представлено исследование, направленное на использование параллельной вычислительной системы для автоматического поиска и визуализации циклов автономной системы двух дифференциальных уравнений. Исследование проводилось в семимерном пространстве параметров – системы коэффициентов и начальных данных задачи Коши. Исследование может быть использовано, в частности, для организации устойчивой работы транспортных систем. При проведении расчетов использовались суперкомпьютеры МГУ в дистанционном режиме. Визуализация результатов проведена на персональных компьютерах Hewlett Packard. Разработанная программная модель применима для отыскания и визуализации циклов при исследовании различных систем двух дифференциальных уравнений.

Dem'yanovich, Y.K. Splines of Variable Approximation Order and Their Wavelet Decompositions (2020) Journal of Mathematical Sciences (United States), 244 (3), pp. 401-418. DOI: 10.1007/s10958-019-04626-x

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We construct spline (finite element) spaces of variable approximation order and find necessary and sufficient conditions for pseudosmoothness of such splines. We study embedding of the spline spaces on embedded subdivisions and construct the corresponding wavelet decompositions. The constructions are based on the approximation relations defined on a cell subdivision of a differentiable manifold under the assumption that the multiplicity of the covering by supports of the coordinate functions is variable, which causes the variable approximation order. The spline spaces possess the adaptive approximation property. The notion of pseudosmoothness lead to new families of embedded spaces.

Мы строим сплайновые (конечно-элементные) пространства переменного порядка аппроксимации и находим необходимые и достаточные условия псевдогладкости таких сплайнов. Мы изучаем вложение пространств сплайнов на вложенных подразделениях и строим соответствующие вейвлет-разложения. Построения основаны на аппроксимационных соотношениях, определенных на клеточном разбиении дифференцируемого многообразия в предположении, что кратность покрытия носителями координатных функций переменная, что обуславливает переменный порядок аппроксимации. Сплайн-пространства обладают свойством адаптивной аппроксимации. Понятие псевдогладкости приводит к новым семействам вложенных пространств.

Dem'yanovich, Y.K. Algorithms for Wavelet Decomposition of of the Space of Hermite Type Splines (2019) Journal of Mathematical Sciences (United States), 242 (1), pp. 133-148. Цитировано 3 раз. DOI: 10.1007/s10958-019-04470-z

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: For the space of (not necessarily polynomial) Hermite type splines we develop algorithms for constructing the spline-wavelet decomposition provided that an arbitrary coarsening of a nonuniform spline-grid is a priori given. The construction is based on approximate relations guaranteeing the asymptotically optimal (with respect to the N-diameter of standard compact sets) approximate properties of this decomposition. We study the structure of restriction and extension matrices and prove

that each of these matrices is the one-sided inverse of the transposed other. We propose the decomposition and reconstruction algorithms consisting of a small number of arithmetical actions

Для пространства сплайнов типа Эрмита (не обязательно полиномиальных) мы разрабатываем алгоритмы построения сплайн-вейвлетных разложений при условии, что произвольное укрупнение неоднородной сплайновой сетки заранее задано. Конструкция основана на аппроксимационных соотношениях, гарантирующих асимптотически оптимальные (относительно  $N$ -поперечника стандартных компактов) свойства приближения этого разложения. Мы изучаем структуру матрицы сужения и матрицы продолжения и доказываем, что каждая из этих матриц является односторонней обратной для транспонированной второй. Предлагаются алгоритмы декомпозиции и реконструкции, содержащие из небольшое количество арифметических действий.

Dem'yanovich, Y.K., Ivantsova, O.N., Khodakovskii, V.A. Positivity of Minimal Coordinate Splines (2016) Journal of Mathematical Sciences (United States), 219 (6), pp. 936-958. DOI: 10.1007/s10958-016-3156-8

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We obtain sufficient positivity conditions for continuously differentiable minimal coordinate splines of the second order in a general case. These conditions are used for constructing positive exponential continuously differentiable coordinate splines. We establish the positivity of hyperbolic and fractional-rational minimal coordinate splines without any restrictions on a grid.

Получены достаточные условия положительности непрерывно дифференцируемых минимальных координатных сплайнов второго порядка в общем случае. Эти условия используются для построения положительных экспоненциальных непрерывно дифференцируемых координатных сплайнов. Устанавливается положительность гиперболических и дробно-рациональных минимальных координатных сплайнов без каких-либо ограничений на сетку.

Dem'yanovich, Y.K. Parallelization of spline-wavelet decomposition (2019) WSEAS Transactions on Mathematics, 18, pp. 241-249. Цитировано 3 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: A discrete spline-wavelet decomposition of the first order is discussed in the framework of the nonclassical approach. The purpose of this paper is to estimate the calculation duration for the discrete spline-wavelet decomposition with the use of two sorts of computers: One-Processor System (OPS) and Parallel Multi-processor System (PMS). The main object is the grid functions, which are named flows. The finite dimensional spaces of the initial flows, wavelet flows and main flows are introduced. These spaces are associated with the original and the enlarged grids, respectively. Estimates for the duration of the calculations are given with taking into account the properties of a communication computer environment. The presentation is accompanied with illustrative examples. We consider the grid functions whose domain is a grid on the real axis (for example, on the set of integers). This approach is convenient when processing flows are sequences of numbers. Then we discuss a grid enlargement and construct an embedded discrete spline space. Using a projection operator, we obtain a wavelet decomposition and give an illustration example of the mentioned decomposition. Taking into account the obtained algorithms we consider their implementation with OPS and PMS. In the situation of the unlimited concurrency the duration (runtime) of calculation with PMS does not depend on the data volume (i.e. it does not depend on the length of the initial flow), on the other hand, the duration of the calculation with OPS is directly proportional to the data volume.

В рамках неклассического подхода обсуждается дискретное сплайн-вейвлетное разложение первого порядка. Целью данной статьи является оценка продолжительности расчета дискретного сплайн-вейвлет-разложения с использованием компьютеров двух типов: однопроцессорной системы (OPS) и параллельной многопроцессорной системы (PMS). Главный объект - сеточные



функции, которые называются потоками. Введены конечномерные пространства начальных потоков, вейвлетных потоков и основных потоков. Эти пространства связаны с исходной и укрупненной сетками соответственно. Приведены оценки продолжительности вычислений с учетом свойств коммуникационной компьютерной среды. Презентация сопровождается наглядными примерами. Мы рассматриваем сеточные функции, область определения которых представляет собой сетку на действительной оси (например, на множестве целых чисел). Такой подход удобен, когда потоки обработки представляют собой последовательности чисел. Затем мы обсуждаем расширение сетки и строим вложенное дискретное пространство сплайнов. Используя оператор проекции, мы получаем вейвлет-разложение и даем иллюстративный пример упомянутого разложения. С учетом полученных алгоритмов рассматриваем их реализацию с OPS и PMS. В ситуации неограниченного параллелизма продолжительность (время выполнения) расчета с использованием PMS не зависит от объема данных (т.е. не зависит от длины начального потока), с другой стороны, от продолжительности расчета с помощью OPS прямо пропорциональна объему данных.

Dem'Yanovich, Y.K. Smoothness and embedding of spaces in FEM (2019) WSEAS Transactions on Mathematics, 18, pp. 46-54. Цитировано 2 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The smoothness of functions is absolutely essential in the case of space of functions in the finite element method (FEM): incompatible FEM slowly converges and has evaluations in nonstandard metrics. The interest in smooth approximate spaces is supported by the desire to have a coincidence of smoothness of an exact solution and an approximate one. The construction of smooth approximating spaces is the main problem of the finite element method. A lot of papers have been devoted to this problem. The embedding of FEM spaces is another important problem; the last one is extremely essential in different approaches to approximate problems, speeding up of convergence and wavelet decomposition. This paper is devoted to coordinate functions obtained with approximate relations which are a generalization of the Strang-Michlin's identities. The aim of this paper is to discuss the pseudo-smoothness of mentioned functions and embedding of relevant FEM spaces. Here we have the necessary and sufficient conditions for the pseudo-smoothness, definition of maximal pseudo-smoothness and conditions of the embedding for FEM spaces defined on embedded subdivisions of smooth manifold. The relations mentioned above concern the cell decomposition of differentiable manifold. The smoothness of coordinate functions inside the cells coincides with the smoothness of the generating vector function of the right side of approximate relations so that the main question is the smoothness of the transition through the boundary of the adjacent cells. The smoothness in this case is the equality of values of functionals with supports in the adjacent cells. The obtained results give the opportunity to verify the smoothness on the boundary of support of basic functions and after that to assert that basic functions are smooth on the whole. In conclusion it is possible to say that this paper discusses the smoothness as the general case of equality of linear functionals with supports in adjacent cells of differentiable manifold. The results may be applied to different sorts of smoothness, for example, to mean smoothness and to weight smoothness. They can be used in different investigations of the approximate properties of FEM spaces, in multigrid methods and in the developing of wavelet decomposition.

Гладкость функций абсолютно необходима в случае пространства функций в методе конечных элементов (МКЭ): Неконформный МКЭ медленно сходится и имеет оценки в нестандартных метриках. Интерес к гладким приближенным пространствам поддерживается стремлением к совпадению гладкости точного и приближенного решения. Построение гладких аппроксимирующих пространств - основная проблема метода конечных элементов. Этой проблеме посвящено много работ. Вложение пространств МКЭ - еще одна важная проблема; последнее чрезвычайно важно в различных подходах к приближенным задачам, ускорению сходимости и вейвлет-разложению. Данная статья посвящена координатным функциям, полученным с помощью аппроксимационных соотношений, которые являются обобщением тождеств Стрэнга-Михлина.

Целью данной статьи является обсуждение псевдогладкости упомянутых функций и вложения соответствующих пространств МКЭ. Здесь мы имеем необходимые и достаточные условия псевдогладкости, определение максимальной псевдогладкости и условия вложения для МКЭ-пространств, определенные на вложенных подразделениях гладкого многообразия. Указанные выше соотношения относятся к клеточному разложению дифференцируемого многообразия. Гладкость координатных функций внутри ячеек совпадает с гладкостью производящей вектор-функции правой части аппроксимационных соотношений, поэтому главный вопрос - плавность перехода через границу соседних ячеек. Гладкость в данном случае - это равенство значений функционалов с носителями в соседних ячейках. Полученные результаты дают возможность проверить гладкость на границе носителя базисных функций и после этого утверждать, что базовые функции в целом гладкие. В заключение можно сказать, что в данной статье гладкость рассматривается как общий случай равенства линейных функционалов с носителями в соседних ячейках дифференцируемого многообразия. Результаты могут быть применены к различным видам гладкости, например, для обозначения усредненной гладкости и взвешенной гладкости. Их можно использовать в различных исследованиях приближенных свойств пространств МКЭ, в многосеточных методах и при разработке вейвлет-разложения.

Dem'yanovich, Yu.K., Miroshnichenko, I.D., Musafarova, E.F. On splines' smoothness (2019) WSEAS Transactions on Mathematics, 18, pp. 129-136. Цитировано 4 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The aim of this article is to discuss the generalized smoothness for the splines on  $q$ -covered manifold, where  $q$  is the natural number. By using mentioned smoothness it is possible to consider the different types of smoothness, for example, the integral smoothness, the weight smoothness, the derivatives smoothness, etc. We find the necessary and sufficient conditions for calculation of basic splines with a priori prescribed smoothness. The mentioned smoothness may contain no more than  $q$  (locally formulated) linearly independent conditions. If the number of the conditions is exactly  $q$ , then the discussed spline spaces on the embedded grids are also embedded. Целью данной статьи является обсуждение обобщенной гладкости сплайнов на  $q$ -кратном покрытии многообразия, где  $q$  - натуральное число. Используя указанную гладкость, можно учитывать различные типы гладкости, например, интегральную гладкость, весовую гладкость, гладкость производных и т. Д. Мы находим необходимые и достаточные условия для вычисления базовых сплайнов с заранее заданной гладкостью. . Указанная гладкость может содержать не более  $q$  (локально сформулированных) линейно независимых условий. Если количество условий равно  $q$ , то обсуждаемые пространства сплайнов на вложенных сетках также оказываются вложенными.

Dem'yanovich, Y.K., Prozorova, E.V. Smoothness of Functions in Spaces of the Finite Element Method (2018) Journal of Mathematical Sciences (United States), 235 (3), pp. 262-274. Цитирован(ы) 1 раз.

DOI: 10.1007/s10958-018-4073-9

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We find necessary and sufficient conditions for the generalized smoothness of the coordinate functions obtained from the approximate relations. We show that for the coordinate functions the smoothness on their supports is equivalent to that on the boundaries of supports. We obtain conditions for the continuity of Courant type finite element approximations and conditions for the uniqueness of a linear space of such approximations.

Найдены необходимые и достаточные условия обобщенной гладкости координатных функций, получаемых из аппроксимационных соотношений. Показано, что для координатных функций гладкость на их носителях эквивалентна гладкости на границах носителей. Получены условия

непрерывности конечно-элементных приближений типа Куранта и условия единственности линейного пространства таких приближений.

Dem'Yanovich, Y.K., Belyakova, O.V., Le, B.T.N. Uniqueness of Space of Hermite Type Splines (2018) Proceedings - 2018 International Conference on Applied Mathematics and Computational Science, ICAMCS.NET 2018, статья № 8955759, pp. 178-183. Цитировано 2 раз. DOI: 10.1109/ICAMCS.NET46018.2018.00037

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The smoothness of functions is quite essential in applications. This smoothness can be used in functional calculations, in the construction of the finite element method, in the approximation of those or other numerical data, etc. The interest in smooth approximate spaces is supported by the desire to have a coincidence of smoothness of exact and approximate solutions. A lot of papers have been devoted to this problem. The continuity of the function at a point means equality of the limits on the right and left; generalization of this situation is the equality of values of two linear functionals (at the prescribed function) with supports located on opposite sides of the mentioned point. Such generalization allows us to introduce the concept of generalized smoothness, which gives the ability to cover various cases of singular behavior functions at some point. The generalized smoothness is called pseudo-smoothness, although, of course, we can talk about the different types of pseudo-smoothness depending on the selected functionals mentioned above. Splines are often used for processing numerical information flows; a lot of scientific papers are devoted to these investigations. Sometimes spline treatment implies to the filtration of the mentioned flows or to their wavelet decomposition. Often a discrete flow appears as a result of analog signal sampling, representing the values of a function, and in this case, the splines of Lagrange type are used. In some cases, there are two interconnected analog signals, one of which represents the values of some function, and the second one represents the values of its derivative. In this case, it is convenient to use splines of the Hermite type of the first height for processing. In all cases, it is highly desirable that the generalized smoothness of the resulting spline coincides with the generalized smoothness of original signal. The concepts, which are introduced in this paper, and the theorems, which are proved here, allow to achieve this result. The paper discusses the existence and uniqueness of spline spaces of the Hermite type of the first height (under condition of fixing the spline grid and the type of generalized smoothness). The purpose of this paper is to prove the uniqueness of the Hermite type spline space of the first height (not necessarily polynomial) having the maximum pseudosmoothness. In this paper we use the necessary and sufficient criterion of the pseudo-smoothness obtained earlier.

В приложениях очень важна гладкость функций. Эта гладкость может быть использована в функциональных расчетах, при построении метода конечных элементов, при аппроксимации тех или иных числовых данных и т. Д. Интерес к гладким приближенным пространствам подкрепляется желанием иметь совпадение гладкости точных и приближенных решений. Этой проблеме посвящено много работ. Непрерывность функции в точке означает равенство предельных значений справа и слева; Обобщением этой ситуации является равенство значений двух линейных функционалов (на заданной функции) с носителями, расположенными по разные стороны от указанной точки. Такое обобщение позволяет ввести понятие обобщенной гладкости, которое дает возможность охватить различные случаи сингулярного поведения функций в некоторой точке. Обобщенная гладкость называется псевдогладкостью, хотя, конечно, можно говорить о различных типах псевдогладкости в зависимости от выбранных функционалов, упомянутых выше. Сплайны часто используются для обработки числовых информационных потоков; Этим исследованиям посвящено множество научных работ. Иногда сплайн-обработка подразумевает фильтрацию упомянутых потоков или их вейвлет-разложение. Часто дискретный поток появляется в результате дискретизации аналогового сигнала, представляющего значения функции, и в этом случае используются сплайны типа Лагранжа. В некоторых случаях есть два взаимосвязанных аналоговых сигнала, один из которых представляет значения некоторой функции,

а второй представляет значения ее производной. В этом случае для обработки удобно использовать сплайны типа Эрмита первой высоты. Во всех случаях очень желательно, чтобы обобщенная гладкость результирующего сплайна совпадала с обобщенной гладкостью исходного сигнала. Понятия, которые вводятся в этой статье, и теоремы, которые здесь доказываются, позволяют достичь этого результата. В статье обсуждается существование и единственность сплайн-пространств типа Эрмита первой высоты (при условии фиксации сплайн-сетки и типа обобщенной гладкости). Целью данной статьи является доказательство единственности сплайнового пространства типа Эрмита первой высоты (не обязательно полиномиального), имеющего максимальную псевдогладкость. В данной статье мы используем необходимый и достаточный критерий псевдогладкости, полученный ранее.

Demyanovich, Y.K. Smoothness of Spaces in Finite Element Methods (2018) Proceedings - 2018 5th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry, MCSI 2018, статья № 8769795, pp. 24-28. DOI: 10.1109/MCSI.2018.00015

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The smoothness of functions is absolutely essential in the case of space of functions in finite element method (FEM): incompatible FEM slowly converges and has evaluations in nonstandard metrics. Interest in smooth approximate spaces is supported by the desire to have a coincidence of smoothness of exact solution and approximate one. The construction of smooth approximating spaces is the main problem of the finite element method. A lot of papers have been devoted to this problem. The aim of the paper is the obtaining of the necessary and sufficient conditions for the smoothness of coordinate functions provided that the last ones are received by approximate relations which are a generalization of Strang-Michlin's conditions. The relations mentioned above discussed on cell decomposition of differentiable manifold. The smoothness of coordinate functions inside of cells coincides with the smoothness of generating vector function of the right side of approximate relations so that the main question is the smoothness of transition through the boundary of adjacent cells. The smoothness in this case is the equality of values of functionals with supports in the adjacent cells. The obtained results give opportunity to verify the smoothness on the boundary of support of basic functions and after that to assert that basic functions are smooth on the whole. In conclusion it is possible to say that this paper discusses the smoothness as the general case of equality of linear functionals with supports in adjacent cells of differentiable manifold. The result may be applied to different sorts of smoothness, for example, to mean smoothness and to weight smoothness. Гладкость функций абсолютно необходима в случае пространства функций в методе конечных элементов (МКЭ): неконформные МКЭ медленно сходятся и имеет оценки в нестандартных метриках. Интерес к гладким аппроксимационным пространствам поддерживается стремлением к совпадению гладкости точного и приближенного решения. Построение гладких аппроксимирующих пространств - основная проблема метода конечных элементов. Этой проблеме посвящено много работ. Целью статьи является получение необходимых и достаточных условий гладкости координатных функций при условии, что последние задаются аппроксимационными соотношениями, являющимися обобщением условий Стрэнга-Михлина. Вышеупомянутые соотношения обсуждались на клеточной декомпозиции дифференцируемого многообразия. Гладкость координатных функций внутри ячеек совпадает с гладкостью производящей вектор-функции правой части аппроксимационных соотношений, так что главный вопрос заключается в плавности перехода через границу соседних ячеек. Гладкость в данном случае - это равенство значений функционалов с носителями в соседних ячейках. Полученные результаты дают возможность проверить гладкость на границе носителя базисных функций и после этого утверждать, что базовые функции в целом гладкие. В заключение можно сказать, что в данной статье гладкость рассматривается как общий случай равенства линейных функционалов с носителями в соседних ячейках дифференцируемого многообразия. Результат может быть

применен к различным видам гладкости, например, для усредненной гладкости и для взвешенной гладкости.

Dem'yanovich, Y.K., Degtyarev, V.G., Lebedinskaya, N.A. Adaptive Wavelet Decomposition of Matrix Flows (2018) Journal of Mathematical Sciences (United States), 232 (6), pp. 816-829. DOI: 10.1007/s10958-018-3911-0

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Adaptive algorithms for constructing spline-wavelet decompositions of matrix flows from a linear space of matrices over a normed field are presented. The algorithms suggested provides for an a priori prescribed estimate of the deviation of the basic flow from the initial one. Comparative bounds of the volumes of data in the basic flow for various irregularity characteristics of the initial flow are obtained in the cases of pseudo-equidistant and adaptive grids. Limit characteristics of the above-mentioned volumes are given in the cases where the initial flow is generated by differentiable functions.

Представлены адаптивные алгоритмы построения сплайн-вейвлетных разложений матричных потоков с элементами из линейного пространства матриц над нормированным полем. Предложенные алгоритмы обеспечивают заранее заданную оценку отклонения основного потока от начального. Получены сравнительные оценки объемов данных в базовом потоке для различных характеристик нерегулярности исходного потока для случаев псевдоэквилидистантных и адаптивных сеток. Приведены предельные характеристики указанных объемов в случаях, когда начальный поток порождается дифференцируемыми функциями.

Dem'yanovich, Y.K., Ivantsova, O.N., Ponomareva, A.Y. Integer Realization of Spline-Wavelet Decomposition (2018) Journal of Mathematical Sciences (United States), 228 (6), pp. 639-654. DOI: 10.1007/s10958-017-3652-5

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We consider integer spline-wavelet algorithms for processing digital flows. We obtain integer variants of the decomposition and reconstruction formulas and give an example demonstrating the practical realizability of the proposed algorithms.

Рассмотрены целочисленные сплайн-вейвлетные алгоритмы обработки цифровых потоков. Получены целочисленные варианты формул декомпозиции и реконструкции и приведен пример, демонстрирующий практическую реализуемость предложенных алгоритмов.

Dem'yanovich, Y.K., Belyakova, O.V., Le, B.T.N. Generalized smoothness of the Hermite type splines (2018) WSEAS Transactions on Mathematics, 17, pp. 359-368. Цитировано 5 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The smoothness of functions is quite essential in applications. This smoothness can be used in functional calculations, in the construction of the finite element method, in the approximation of those or other numerical data, etc. The interest in smooth approximate spaces is supported by the desire to have a coincidence of smoothness of exact and approximate solutions. A lot of papers have been devoted to this problem. The continuity of the function at a point means equality of the limits on the right and left; the generalization of this situation is the equality of values of two linear functionals (at the prescribed function) with supports located on opposite sides of the mentioned point. Such generalization allows us to introduce the concept of generalized smoothness, which gives the ability to cover various cases of singular behavior functions at some point. The generalized smoothness is called pseudo-smoothness, although, of course, we can talk about the different types of pseudo-smoothness depending on the selected functionals mentioned above. Splines are often used for processing numerical information flows; a lot of scientific papers are devoted to these investigations. Sometimes spline

treatment implies to the filtration of the mentioned flows or to their wavelet decomposition. A discrete flow often appears as a result of analog signal sampling, representing the values of a function, and in this case, the splines of the Lagrange type are used. In some cases, there are two interconnected analog signals, one of which represents the values of some function, and the second one represents the values of its derivative. In this case, it is convenient to use the splines of the Hermite type of the first height for processing. In all cases, it is highly desirable that the generalized smoothness of the resulting spline coincides with the generalized smoothness of the original signal. The concepts, which are introduced in this paper, and the theorems, which are proved here, allow us to achieve this result. The paper discusses the existence and uniqueness of spline spaces of the Hermite type of the first height (under condition of fixing the spline grid and the type of generalized smoothness). The purpose of this paper is to discuss generalized smoothness of the Hermite type spline space (not necessarily polynomial). In this paper we use the necessary and sufficient criterion of the generalized smoothness obtained earlier.

В приложениях очень важна гладкость функций. Эта гладкость может быть использована в функциональных расчетах, при построении метода конечных элементов, при аппроксимации тех или иных числовых данных и т.д. Интерес к гладким приближенным пространствам подкрепляется желанием иметь совпадение гладкости точных и приближенных решений. Этой проблеме посвящено много работ. Непрерывность функции в точке означает равенство пределов справа и слева. Обобщением этой ситуации является равенство значений двух линейных функционалов (при заданной функции) с носителями, расположенными по разные стороны от указанной точки. Такое обобщение позволяет нам ввести понятие обобщенной гладкости, которое дает возможность охватить различные случаи сингулярного поведения функций в некоторой точке. Обобщенная гладкость называется псевдогладкостью, хотя, конечно, можно говорить о различных типах псевдогладкости в зависимости от выбранных функционалов, упомянутых выше. Сплайны часто используются для обработки числовых информационных потоков; Этим исследованиям посвящено множество научных работ. Иногда сплайн-обработка подразумевает фильтрацию упомянутых потоков или их вейвлет-разложение. Дискретный поток часто появляется в результате дискретизации аналогового сигнала, представляющего значения функции, и в этом случае используются сплайны типа Лагранжа. В некоторых случаях есть два взаимосвязанных аналоговых сигнала, один из которых представляет значения некоторой функции, а второй представляет значения ее производной. В этом случае для обработки удобно использовать сплайны типа Эрмита первой высоты. Во всех случаях очень желательно, чтобы обобщенная гладкость результирующего сплайна совпадала с обобщенной гладкостью исходного сигнала. Понятия, которые вводятся в этой статье, и теоремы, которые здесь доказываются, позволяют нам достичь этого результата. В статье обсуждается существование и единственность сплайн-пространств типа Эрмита первой высоты (при условии фиксации сплайн-сетки и типа обобщенной гладкости). Целью данной статьи является обсуждение обобщенной гладкости сплайн-пространства типа Эрмита (не обязательно полиномиального). В данной статье мы используем необходимый и достаточный критерий обобщенной гладкости, полученный ранее.

Dem'Yanovich, Y.K., Evdokimova, T.O., Prozorova, E.V. On general smoothness of minimal splines of the Lagrange type (2018) WSEAS Transactions on Mathematics, 17, pp. 304-310. Цитировано 3 раз. ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

**КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ:** In many cases the smoothness of splines is important (for qualitative approximation, for the calculation of a number of functionals, etc.). In the case of discontinuity of approximated functions it is difficult to use ordinary splines. It is desirable to have splines with similar properties of the approximated function. The purpose of this paper is to introduce the concept of general smoothness with the aid of linear functionals having a definite location of supports. Splines are often used for processing numerical information flows; a lot of scientific papers are devoted to these investigations. Sometimes spline treatment implies to the filtration of the mentioned flows or to their wavelet decomposition. A discrete flow often appears as a result of analog signal sampling, representing the

values of a function, and in this case, the splines of the Lagrange type are used. In all cases, it is highly desirable that the generalized smoothness of the resulting spline coincides with the generalized smoothness of the original signal. Here we formulate the necessary and sufficient conditions for general smoothness of splines, and also a toolkit is being developed to build mentioned splines. The proposed scheme allows us to consider splines generated by functions from different spaces and to apply the obtained result to sources which can appear in physics, chemistry, biology, etc.

Во многих случаях важна гладкость сплайнов (для качественной аппроксимации, для вычисления ряда функционалов и т. д.). В случае разрыва аппроксимируемых функций использование обычных сплайнов затруднительно. Желательно иметь сплайны с аналогичными свойствами аппроксимируемой функции. Цель данной статьи - ввести понятие общей гладкости с помощью линейных функционалов, имеющих определенное расположение носителей. Сплайны часто используются для обработки числовых информационных потоков; Этим исследованиям посвящено множество научных работ. Иногда сплайн-обработка подразумевает фильтрацию упомянутых потоков или их вейвлет-разложение. Дискретный поток часто появляется в результате дискретизации аналогового сигнала, представляющего значения функции, и в этом случае используются сплайны типа Лагранжа. Во всех случаях очень желательно, чтобы обобщенная гладкость результирующего сплайна совпадала с обобщенной гладкостью исходного сигнала. Здесь мы формулируем необходимые и достаточные условия обобщенной гладкости сплайнов, а также разрабатываем инструментарий для построения упомянутых сплайнов. Предлагаемая схема позволяет рассматривать сплайны, порожденные функциями из разных пространств, и применять полученный результат к источникам, которые могут появиться в физике, химии, биологии и т.д.

Dem'yanovich, Y.K. General flows and their adaptive decompositions (2018) WSEAS Transactions on Mathematics, 17, pp. 28-34. Цитировано 9 раз.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Adaptive algorithms of spline-wavelet decomposition in a linear space over metrized field are proposed. The algorithms provide a priori given estimate of the deviation of the main flow from the initial one. Comparative estimates of data of the main flow under different characteristics of the irregularity of the initial flow are done. The limiting characteristics of data, when the initial flow is generated by abstract differentiable functions, are discussed.

Предлагаются адаптивные алгоритмы сплайн-вейвлетного разложения в линейном пространстве над метризованным полем. Алгоритмы дают априорно заданную оценку отклонения основного потока от исходного. Сделаны сравнительные оценки данных основного потока при различных характеристиках неравномерности начального потока. Обсуждаются предельные характеристики данных, когда начальный поток генерируется дифференцируемыми абстрактными функциями.

Dem'yanovich, Y.K. On embedding and extended smoothness of spline spaces (2017) Far East Journal of Mathematical Sciences, 102 (9), pp. 2025-2052. Цитировано 11 раз. DOI: 10.17654/MS102092025

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper introduces the notion of extended smoothness (which includes usual smoothness), constructs extended smooth splines, defines the necessary and sufficient conditions for uniqueness and the embedding of the spline spaces pointed out. Extended smoothness, introduced here, also considers irregular splines. As an application of the mentioned results, the necessary and sufficient conditions for the embedding of spline spaces are obtained under given condition of maximum smoothness (in the usual sense) for minimal  $B\phi$ -splines of  $m$ th order. Here two sorts of spline spaces of the first order with irregular generating functions are also analyzed.

В статье вводится понятие обобщенной гладкости (включающей обычную гладкость), строятся обобщенно гладкие сплайны, определяются необходимые и достаточные условия единственности и вложения указанных пространств сплайнов. Обобщенная гладкость, представленная здесь, также

учитывает нерегулярные сплайны. В качестве приложения упомянутых результатов получены необходимые и достаточные условия вложения сплайновых пространств при заданном условии максимальной гладкости (в обычном смысле) в случае минимальных Вф -сплайнов  $m$ -го порядка. Здесь также анализируются два вида сплайновых пространств первого порядка с нерегулярными производящими функциями.

Dem'yanovich, Y.K., Kovtunenکو, E.S., Safonova, T.A. Existence and uniqueness of spaces of splines of maximal pseudosmoothness (2017) *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 224 (5), pp. 647-660. Цитировано 7 раз. DOI: 10.1007/s10958-017-3441-1

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation и другие.

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: We consider gradation of pseudosmoothness of (in general, nonpolynomial) splines and find conditions under which the space of splines of maximal pseudosmoothness is unique on a given grid, possesses the embedding property on embedded grids, and satisfies the approximation relations. The proposed general scheme can be applied to splines generated by functions in spaces of integrable functions and in Sobolev spaces. The results are illustrated by some examples.

Рассмотрена градация псевдогладкости (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов и найдены условия, при которых пространство сплайнов максимальной псевдогладкости единственно на заданной сетке, обладает свойством вложенности на вложенных сетках и удовлетворяет аппроксимационным соотношениям. Предложенная общая схема может быть применена к сплайнам, порожденным функциями из пространств интегрируемых функций и из пространств Соболева. Результаты проиллюстрированы некоторыми примерами.

Dem'yanovich, Y.K., Ponomarev, A.S. Realization of the spline-wavelet decomposition of the first order (2017) *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 224 (6), pp. 833-860. Цитировано 6 раз. DOI: 10.1007/s10958-017-3454-9

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: The aim of the paper is to present an orthogonal basis for the discrete wavelets in the general structure of the spline-wavelet decomposition. Decomposition of an original numerical flow without embedding in the standard functional spaces is discussed. It makes it possible to concentrate on simplification of the realization formulas: here, the simple formulas of decomposition and reconstruction are presented, an orthogonal wavelet basis is constructed, and an illustrative example is given. Finally, some estimates of the complexity of the method discussed for different software environments are provided.

Цель статьи - представить ортогональный базис для дискретных всплесков в общей структуре сплайн-вейвлетного разложения. Обсуждается декомпозиция исходного числового потока без вложения в стандартные функциональные пространства. Это позволяет сосредоточиться на упрощении формул реализации: здесь представлены простые формулы разложения и восстановления, построен ортогональный вейвлет-базис и дан наглядный пример. Наконец, приведены некоторые оценки сложности обсуждаемого метода для различных программных сред.

Dem'yanovich, Y.K., Makarov, A.A. Necessary and sufficient nonnegativity conditions for second-order coordinate trigonometric splines (2017) *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 50 (1), pp. 5-10. Цитировано 5 раз. DOI: 10.3103/S1063454117010034

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 28, Universitetskii pr., Petrodvorets, St., Petersburg, 198504, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Necessary and sufficient nonnegativity conditions for continuous differentiable coordinate trigonometric splines of the second order are obtained; the convexity and concavity intervals of these splines are determined. The method of investigation consists in recognizing concavity in intervals adjacent to the endpoints of the support of a coordinate spline under consideration



and applying arguments related to the number of zeros of the solution of the corresponding boundary value problem for a second-order differential equation.

Получены необходимые и достаточные условия неотрицательности непрерывных дифференцируемых координатных тригонометрических сплайнов второго порядка; определяются интервалы выпуклости и вогнутости этих сплайнов. Метод исследования состоит в распознавании вогнутости на интервалах, примыкающих к концам носителя рассматриваемого координатного сплайна, и в применении аргументов, связанных с количеством нулей решения соответствующей краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F. On the Approximation by Local Complex-Valued Splines(2018) Proceedings - 2018 5th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry, MCSI 2018, статья № 8769767, pp. 57-62. DOI: 10.1109/MCSI.2018.00021

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Sometimes it is desirable to visualize complex-valued functions in polar coordinates that always have difficulties. But actually it is sufficient to visualize separately the real and imaginary parts of a complex-valued function. For a fast visualization process, local spline interpolation of functions from two variables is the most convenient in applications and gives approximations with the required order of accuracy. This paper deals with local complex-valued splines, constructed using tensor product spline interpolation in a disc with a centre of zero and a radius of 1. For constructing the tensor product we use local basis splines of a radial variable and local complex-valued basis splines of an angular variable. For the construction of the grid we consider a number of circles in the disc of radius 1 with a center of zero, and get a number of points on the boundary of this disc, arranged from the centre to the edge. The points at which those lines cross each circle form the grid nodes. The approximation is constructed separately in each elementary segment, formed by two arcs and two line segments. For the approximation of a complex-valued function we use the values of this function in several nodes near this elementary segment and the tensor product of basis splines. The order of the approximation depends on the splines' properties which we use in the tensor product. In this paper we use local exponential and polynomial splines of second and third order approximation.

Иногда желательно визуализировать комплексные функции в полярных координатах, что всегда вызывает затруднения. Но на самом деле достаточно визуализировать отдельно действительную и мнимую части комплексной функции. Для быстрого процесса визуализации локальная сплайн-интерполяция функций от двух переменных является наиболее удобной в приложениях и дает приближения с требуемым порядком точности. В данной статье рассматриваются локальные комплекснозначные сплайны, построенные с использованием сплайновой интерполяции тензорного произведения в круге с центром нуля и радиусом 1. Для построения тензорного произведения используются локальные базисные сплайны радиальной переменной и локальный комплексный базис. шлицы угловой переменной. Для построения сетки мы рассматриваем количество окружностей в круге радиуса 1 с центром в нуле и получаем количество точек на границе этого диска, расположенных от центра к краю. Точки, в которых эти линии пересекают каждый круг, образуют узлы сетки. Аппроксимация строится отдельно на каждом элементарном отрезке, образованном двумя дугами и двумя отрезками прямых. Для аппроксимации комплекснозначной функции используются значения этой функции в нескольких узлах вблизи этого элементарного отрезка и тензорное произведение базисных сплайнов. Порядок аппроксимации зависит от свойств сплайнов, которые мы используем в тензорном произведении. В данной работе используются локальные экспоненциальные и полиномиальные сплайны второго и третьего порядка аппроксимации.

Burova, I.G., Muzafarova, E.F., Zhilin, D.E. The Approximations of Functions and Adaptive Grids

(2018) Proceedings - 2018 International Conference on Applied Mathematics and Computational Science, ICAMCS.NET 2018, статья № 8955766, pp. 171-177. DOI: 10.1109/ICAMCS.NET46018.2018.00036  
ОРГАНИЗАЦИИ: Department of Computational Mathematics, St.Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: A visualization of real function of two variables is often technically difficult. Visualization of complex-valued functions can be simplified by visualizing the real and imaginary parts of these functions. To approximate fast-growing or decreasing functions, often a uniform grid of nodes is not enough and it is necessary to use a special adaptive grid. Therefore, constructing an adaptive mesh of nodes that takes into account the behavior of the function of several variables is of considerable interest. In this paper, we propose one method for constructing an adaptive grid of nodes on a line. Such an adaptive grid can be used to approximate the functions of several variables. Formulae for constructing the adaptive grid of nodes and the results of numerical experiments are given. An approximation of real functions of one and two variables and complex-valued functions is constructed using polynomial and non-polynomial local splines of one variable. Approximations in a rectangular region in the plane are constructed using the tensor product. Formulae for approximations of real and complex-valued functions and examples of visualization of some functions are given.

Визуализация реальной функции двух переменных часто бывает технически сложной. Визуализацию комплексных функций можно упростить, визуализировав действительную и мнимую части этих функций. Для аппроксимации быстрорастущих или убывающих функций часто недостаточно единой сетки узлов и необходимо использовать специальную адаптивную сетку. Поэтому построение адаптивной сетки узлов, учитывающей поведение функции нескольких переменных, представляет значительный интерес. В этой статье мы предлагаем один метод построения адаптивной сетки узлов на прямой. Такая адаптивная сетка может использоваться для аппроксимации функций нескольких переменных. Приведены формулы для построения адаптивной сетки узлов и результаты численных экспериментов. Аппроксимация вещественных функций одной и двух переменных и комплекснозначных функций строится с использованием полиномиальных и неполиномиальных локальных сплайнов одной переменной. Аппроксимации в прямоугольной области на плоскости строятся с помощью тензорного произведения. Приведены формулы для приближений вещественных и комплексных функций и примеры визуализации некоторых функций.

Burova, I.G. On approximations of the sixth order with the smooth polynomial and non-polynomial splines (2020) Proceedings - 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Science and Engineering, MACISE 2020, статья № 9195628, pp. 297-300.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper discusses twice continuously differentiable and three times continuously differentiable approximations with polynomial and non-polynomial splines. To construct the approximation, a polynomial and non-polynomial local basis of the second level and the sixth order approximation is constructed. We call the approximation a second level approximation because it uses the first and the second derivatives of the function. The non-polynomial approximation has the properties of polynomial and trigonometric functions. Here we have also constructed a non-polynomial interpolating spline which has the first, the second and the third continuous derivative. This approximation uses the values of the function at the nodes, the values of the first derivative of the function at the nodes and the values of the second derivative of the function at the ends of the interval  $[a, b]$ . The theorems of the approximations are given. Numerical examples are given.

В статье обсуждаются дважды непрерывно дифференцируемые и трижды непрерывно дифференцируемые приближения с полиномиальными и неполиномиальными сплайнами. Для построения приближения строится полиномиальный и неполиномиальный локальный базис второго уровня и приближения шестого порядка. Мы называем это приближение приближением

второго уровня, потому что оно использует первую и вторую производные функции. Неполиномиальное приближение обладает свойствами полиномиальных и тригонометрических функций. Здесь мы также построили непполиномиальный интерполирующий сплайн, который имеет первую, вторую и третью непрерывную производную. Это приближение использует значения функции в узлах, значения первой производной функции в узлах и значения второй производной функции на концах интервала  $[a, b]$ . Приведены теоремы об аппроксимации. Приведены числовые примеры.

Burova, I.G. On approximation with the continuous polynomial cubic splines (2020) Proceedings - 24th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, CSCC 2020, статья № 9402672, pp. 126-129. DOI: 10.1109/CSCC49995.2020.00030.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: Algorithms for the calculation of the continuous cubic polynomial splines of the maximum defect are considered. The behavior of constants and the Lebesgue functions for cubic polynomial splines in the case of non-uniform condensing grids are discussed. The algorithm is proposed for constructing an irregular grid consistent. This grid provides the minimum error when the left, the right, or the middle cubic polynomial splines.

Рассмотрены алгоритмы расчета непрерывных кубических полиномиальных сплайнов максимального дефекта. Обсуждается поведение констант и функций Лебега для кубических полиномиальных сплайнов в случае неоднородных сгущающихся сеток. Предлагается алгоритм построения согласованной нерегулярной сетки. Эта сетка обеспечивает минимальную ошибку при использовании левых, правых или средних кубических полиномиальных сплайнов.

Burova, I.G. Non-Polynomial Splines and Solving the Heat Equation (2020) Proceedings - 24th International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers, CSCC 2020, статья № 9402599, pp. 140-146. DOI: 10.1109/CSCC49995.2020.00033.

ОРГАНИЗАЦИИ: St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St.Petersburg, 199034, Russian Federation

КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ: This paper discusses the application of the polynomial, exponential and trigonometric splines of the fourth order of approximation to the construction of methods for numerically solving the heat conduction problem. The exponential splines and the trigonometric splines are used here to approximate the partial derivatives. This approach allows us to construct explicit and implicit difference schemes. The main focus of the paper is on implicit difference schemes. Numerical examples are given.

В статье рассматривается применение полиномиальных, экспоненциальных и тригонометрических сплайнов четвертого порядка аппроксимации для построения методов численного решения задачи теплопроводности. Экспоненциальные сплайны и тригонометрические сплайны используются здесь для аппроксимации частных производных. Такой подход позволяет строить явные и неявные разностные схемы. Основное внимание в статье уделяется неявным разностным схемам. Приведены числовые примеры.