

Аннотация цикла работ
Спектральный синтез в гильбертовых пространствах целых функций
Баранова Антона Дмитриевича.
доктора физико-математических наук
профессора кафедры математического анализа СПбГУ

На конкурс выдвигается цикл работ А.Д. Баранова, посвященный задачам спектрального синтеза для систем воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций и для одномерных возмущений компактных самосопряженных операторов. Цикл включает в себя три работы:

- [1] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels, *Advances in Mathematics*, 235 (2013), 525-554.
- [2] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, Spectral synthesis in de Branges spaces, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, 25 (2015), 2, 417-452.
- [3] A. Baranov, D. Yakubovich, Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators, *Advances in Mathematics*, 302 (2016), 740-798.

Задача спектрального синтеза состоит в восстановлении инвариантного подпространства линейного оператора по содержащимся в нем собственным и корневым векторам. Возможность такого восстановления для различных классов операторов – один из классических и центральных вопросов абстрактной теории операторов. Проблемы спектрального синтеза для операторов сдвига и дифференцирования впервые были рассмотрены еще в 1950-е годы в знаменитых работах Л. Шварца и Ж.-Р. Кахана. С задачей синтеза тесно связан другой классический вопрос анализа – восстановление элемента гильбертова пространства по его обобщенному ряду Фурье относительно данной пары биортогональных семейств. Полную минимальную систему с полной биортогональной системой называют наследственно полной, если каждый вектор лежит в замкнутой линейной оболочке частичных сумм своего ряда Фурье. Это свойство естественно интерпретировать как наислабейшую форму восстановления вектора по своему ряду Фурье.

Важным открытым вопросом в этой области в течение многих лет оставался вопрос о наследственной полноте полной и минимальной системы из экспонент в пространстве L^2 на отрезке. Эта задача была решена в работе [1], где показано, что существуют ненаследственно полные системы экспонент и, таким образом, восстановление функции по ее негармоническому ряду Фурье вообще говоря невозможно (в частности, не существует универсального линейного метода суммирования). Вторым неожиданным результатом состоит в том, что спектральный синтез для экспоненциальных систем тем не менее всегда имеет место с точностью до одномерного дефекта.

В статье [2] результаты работы [1] были распространены на широкий и важный класс гильбертовых пространств целых функций – пространства де Бранжа, играющие важную роль при исследовании спектральных задач для канонических систем дифференциальных операторов. Роль экспоненциальных систем в этом контексте играют системы из воспроизводящих ядер пространств де Бранжа. В работе [2] получено полное решение проблемы наследственной полноты для систем воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа, построены примеры систем, не допускающих синтез с данным конечным или бесконечным дефектом.

В статье [3] рассмотрены приложения вышеописанных результатов в спектральной теории одномерных возмущений компактных самосопряженных операторов. Основным инструментом является функциональная модель таких возмущений, сопоставляющая каждому одномерному возмущению унитарно эквивалентный модельный оператор, действующий в некотором пространстве де Бранжа. На основе этой модели получены критерии полноты собственных векторов одномерных возмущений и возможности спектрального синтеза. При этом показано, что у любого компактного самосопряженного оператора (бесконечного ранга) имеются одномерные возмущения, не допускающие спектральный синтез. Также получены результаты о вольтерровских одномерных возмущениях, дополняющие классические теоремы М.В. Келдыша и В.И. Мацаева. Полученные результаты показывают всю сложность и разнообразие спектральной структуры даже в случае возмущений ранга один.

Annotation

Spectral synthesis in Hilbert spaces of entire functions

by Baranov Anton Dmitrievich

doctor of Physical and Mathematical Sciences

professor of Chair of Mathematical Analysis of Saint Petersburg State University

A series of work by A.D. Baranov is devoted to the problems of the spectral synthesis for systems of reproducing kernels in Hilbert spaces of entire functions and for rank one perturbations of compact selfadjoint operators. This series includes the following papers:

[1] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels, *Advances in Mathematics*, 235 (2013), 525-554.

[2] A. Baranov, Y. Belov, A. Borichev, Spectral synthesis in de Branges spaces, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, 25 (2015), 2, 417-452.

[3] A. Baranov, D. Yakubovich, Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators, *Advances in Mathematics*, 302 (2016), 740-798.

The spectral synthesis problem consists in reconstruction of an invariant subspace of a linear operator from the eigenvectors and root vectors it contains. The possibility of such reconstruction for various classes of linear operators is one of the central and classical problems of the abstract operator theory. Spectral synthesis [problems for translation and differentiation operators were considered in 1950-s in the famous works of L. Schwartz and J.-P. Kahane. The synthesis problem is closely related with yet another classical problem of analysis – reconstruction of a vector from its generalized Fourier series with respect to a given pair of biorthogonal families. A complete and minimal system is said to be hereditarily complete if any vector belongs to the closed linear span of the partial sums of its Fourier series. It is natural to interpret this property as a weak form of the reconstruction of a vector from its Fourier series.

For many years an important open problem in this area was whether any complete and minimal system of exponentials in L^2 on the interval is hereditarily complete. This problem was solved in paper [1], where it was shown that there exists nonhereditarily complete systems of exponentials and so, in general, there is no reconstruction of a function from its nonharmonic Fourier series (in particular, there is no universal linear summation method). Another unexpected result says that the spectral synthesis for exponential systems still takes place up to one-dimensional defect.

In paper [2] the results of [1] were extended to a wide and important class of spaces of entire functions, namely, de Branges spaces which play an important role in the study of spectral problems for canonical systems of differential equations. The role of exponential systems in this context is played by systems of reproducing kernels in de Branges spaces. In paper [2] a complete solution of the problem of hereditary completeness for systems of reproducing kernels in de Branges spaces and examples of systems which do not admit spectral synthesis with any given finite or infinite defect were constructed.

In paper [3] applications of the results described above to the spectral theory of rank one perturbations of compact selfadjoint operators were considered. The main tool is a functional model for such perturbations which associate with any rank one perturbation a unitary equivalent model operator which acts in some de Branges space. On the basis of this model criteria for completeness of eigenvectors of a rank one perturbation and for the spectral synthesis were

obtained. Moreover, it was shown that any (infinite rank) compact selfadjoint operator has rank one perturbations which do not admit the spectral synthesis. Also, results about Volterra rank one perturbations were obtained which complement the classical theorems of M.V. Keldysh and V.I. Matsaev. The obtained results show the complexity and diversity of the spectral structure even in the case of rank one perturbations.